Példatár műszaki rendszerek modellezése és optimalizálása témakörhöz

Adonyi Róbert, Bertók Botond, Friedler Ferenc,
Heckl István, Hegyháti Máté, Holczinger Tibor,
Imreh Csanád, Kovács Zoltán, Süle Zoltán

2014

A tananyag a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0104 "A felsőfokú informatikai oktatás minőségének fejlesztése, modernizációja" c. projekt keretében a Pannon Egyetem és a Szegedi Tudományegyetem együttműködésében készült.

ÚJ SZÉCHENYI TERV

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

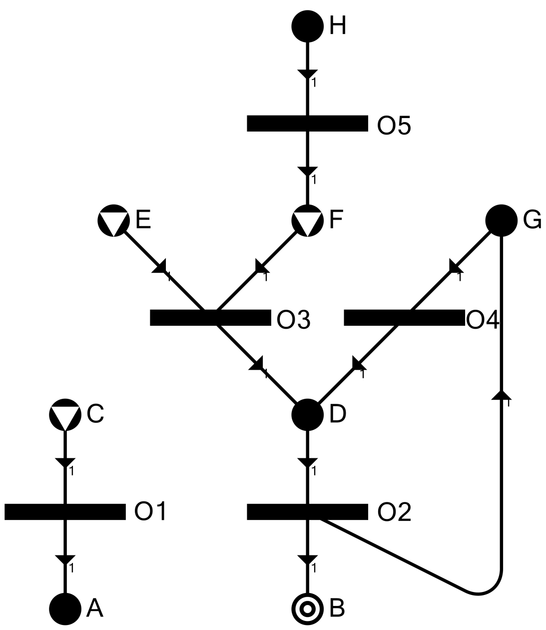
Tartalomjegyzék

1. PÉLDATÁR

MSG példák

1.1. MSG első példa

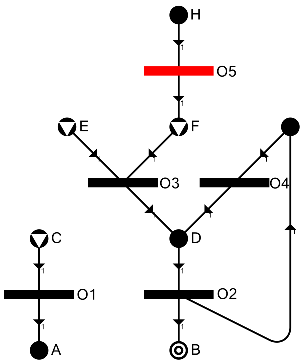
$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \{A, B, C, D, E, F, G, H\}\\
\mathcal{P} &= \{B\}\\
\mathcal{R} &= \{C, E, F\}\\
\mathcal{O} &= \Big\{O1 = (\{C\}, \{A\}),\\
&\quad O2 = (\{D\}, \{B, G\}),\\
&\quad O3 = (\{E, F\}, \{D\}),\\
&\quad O4 = (\{G\}, \{D\}),\\
&\quad O5 = (\{H\}, \{F\})\Big\}
\end{aligned}
$$



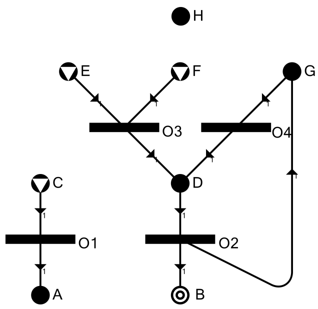
1.1. ábra. Kiinduló állapot

1.1.1. *Redukciós rész:*

1. Kivesszük azon műveleti egységeket, amik nyersanyagot állítanak elő ($O := O\Phi - (R)$), mert megsértik az (S2) axiómát: ($O5$)

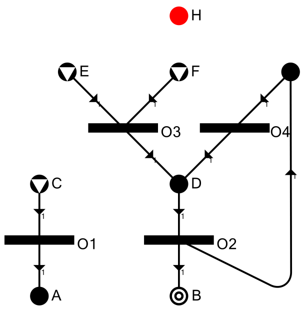


1.2. ábra. Pirossal jelölve az axiómát sértő műveleti egység

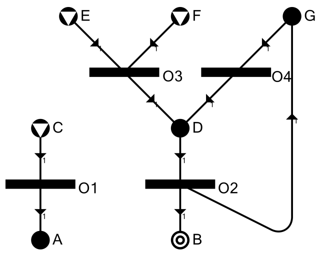


1.3. ábra. Kivétel után

2. Kivesszük azon anyagokat, melyek se nem bemenetei, se nem kimenetei egyik műveleti egységnek sem ($M := \Psi(O)$), mert megsértik az (S5) axiómát: (H)

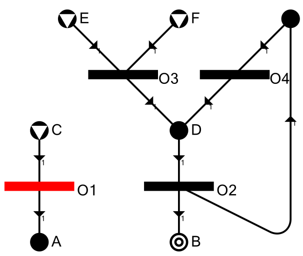


1.4. ábra. Pirossal jelölve az axiómát sértő műveleti egység

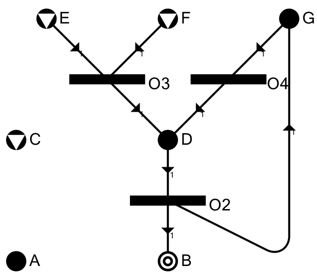


1.5. ábra. Kivétel után

3. Kivesszük azon műveleti egységeket, melyekből nem vezet út egyik legyártandó termékhez sem, mert megsértik az (S4) axiómát: ($O1$)

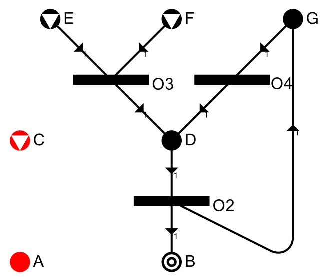


1.6. ábra. Pirossal jelölve az axiómát sértő műveleti egység

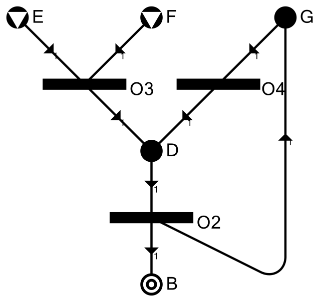


1.7. ábra. Kivétel után

4. Az $O1$ műveleti egység eltávolítása után újra vannak olyan anyagok, melyek megsértik az (S5) axiómát, azaz se nem bemenetei, se nem kimenetei egyik műveleti egységnek sem ($M := \Psi(O)$) (A, C)



1.8. ábra. Pirossal jelölve az axiómát sértő műveleti egység



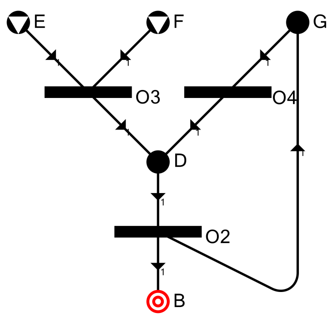
1.9. ábra. Kivétel után

A redukciós rész véget ért, a struktúra megfelel az axiómáknak.

1.1.2. Kompozíciós rész:

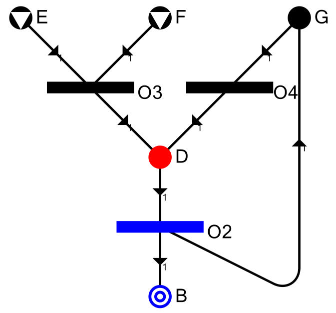
A kompozíciós részben a termékek felől haladunk a nyersanyagok felé. A struktúrába bevesszük azokat a műveleti egységeket, amelyekből elérhetőek a termékek. A kompozíciós részben három halmazt használunk a maximális struktúra generálásához:

- A p halmaz azokat az anyagcsomópontokat tartalmazza, amelyeket elő kell állítani. Ez kiinduláskor egyenlő a termékek halmazával. Az ábrán ezek az elemek piros színnel lesznek jelölve.
- Az m halmaz azokat az anyagcsomópontokat tartalmazza, amelyeket már megvizsgáltunk, és előállítottunk. Az algoritmus indulásakor ez a halmaz üres. Ezek a csomópontok az ábrán kék színnel lesznek jelölve.
- Az o halmaz azokat a műveleti egységeket tartalmazza, amelyeket már beválasztottunk a maximális struktúrába. Induláskor ez a halmaz szintén üres.



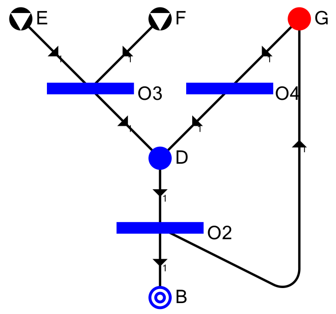
1.10. ábra. Kompozíciós rész kiinduló struktúra

- A kompozíció egy iterációjában a p halmazból kiválasztunk egy x anyagot, és
  - x-et berakjuk az m halmazba ($m := m \bigcup x$),
  - berakjuk a B-t előállítani képes egységeket ($ox := \Phi - (x)$) az o halmazba ($o := o \bigcup ox$),
  - az újonnan bevett műveleti egységek bemeneti anyagai közül azokat, amelyek nem nyersanyagok és még nem vizsgáltuk őket, berakjuk az előállítandó anyagok közé ($p := (p \bigcup \Psi - (ox)) \backslash (R \bigcup m)$).
- Az első iterációban B anyagot tudjuk kiválasztani. Ezt az anyagot az $O2$ műveleti egység tudja előállítani, ezt bevesszük a struktúrába. Az $O2$ műveleti egység bemeneti anyaga a D anyag, amely nem nyersanyag, és még nem vizsgáltuk, ezért berakjuk a p halmazba, ahonnan eltávolítjuk a B anyagot.



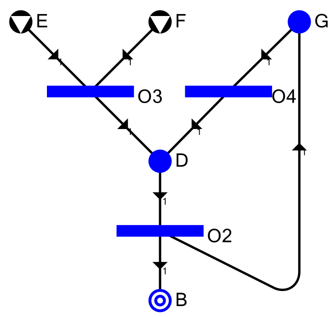
1.11. ábra. Az első iteráció utáni hálózat

- A második iterációban a D anyagot vizsgáljuk, ami alapján az $O3$ és $O4$ egységek kerülnek bele a struktúrába. Az $O3$ és $O4$ egységek bemeneti anyagai az E, F , G, melyek közül az E és az F nyersanyag, így azok nem kerülnek bele az előállítandó anyagok halmazába.



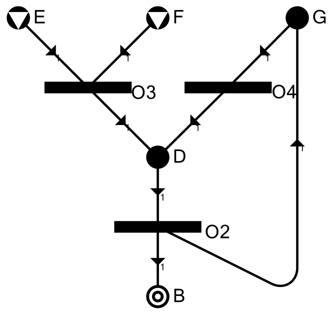
1.12. ábra. A második iteráció utáni hálózat

- A harmadik iterációban a p halmazban kizárólag G anyag van, ezért ennek vizsgálatára kerül sor. Ezt az anyagot csak az $O2$ műveleti egység állítja elő, ezért hozzáadjuk a struktúrához. Az $O2$ bemeneti anyaga a D anyag, melyet már vizsgáltunk, ezért nem kerül bele a p halmazba.



1.13. ábra. A harmadik iteráció utáni hálózat

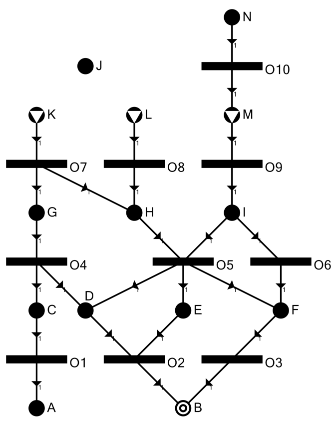
A harmadik iteráció után a p halmaz üres, azaz az összes olyan anyagot megvizsgáltuk, amely B termékből elérhető a nyilakon visszafelé haladva. Az algoritmus kimenete egy (m, o) pár, ahol m a maximális struktúrában szereplő anyagok, o pedig az itt szereplő műveleti egységek halmaza. A példa maximális struktúrája az 1.14-es ábrán látható.



1.14. ábra. A példa maximális struktúrája

1.2. MSG második példa

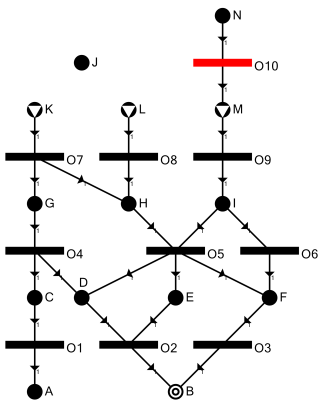
$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N\}\\
\mathcal{P} &= \{B\}\\
\mathcal{R} &= \{K, L, M\}\\
\mathcal{O} &= \Big\{O1 = (\{C\}, \{A\}),\\
&\quad O2 = (\{D, E\}, \{B\}),\\
&\quad O3 = (\{F\}, \{B\}),\\
&\quad O4 = (\{G\}, \{C, D\}),\\
&\quad O5 = (\{H, I\}, \{D, E, F\}),\\
&\quad O6 = (\{I\}, \{F\}),\\
&\quad O7 = (\{K\}, \{G\}),\\
&\quad O8 = (\{L\}, \{H\}),\\
&\quad O9 = (\{M\}, \{I\}),\\
&\quad O10 = (\{N\}, \{M\})\Big\}
\end{aligned}$$



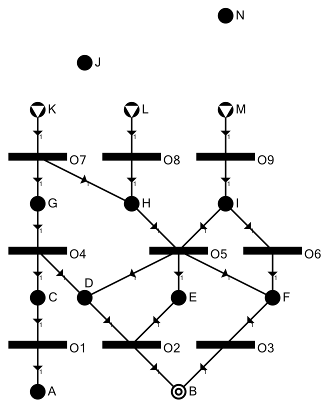
1.15. ábra. Kiinduló állapot

1.2.1. Redukciós rész

1. Kivesszük azon műveleti egységeket, amik nyersanyagot állítanak elő ($O := O \backslash \Phi - (R)$), mert megsértik az (S2) axiómát: $(O10)$

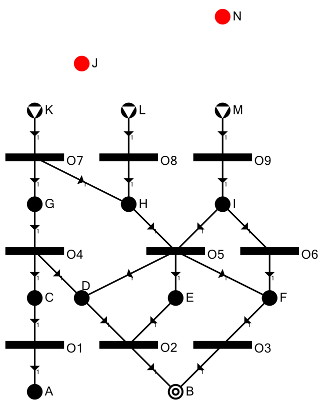


1.16. ábra. Pirossal jelölve az axiómát sértő műveleti egységek

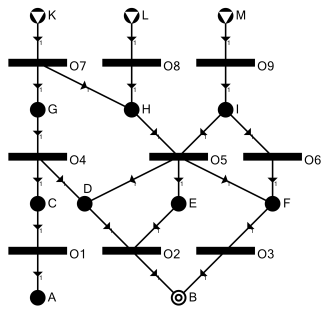


1.17. ábra. Kivétel után

2. Kivesszük azon anyagokat, melyek se nem bemenetei, se nem kimenetei egyik műveleti egységnek sem ($M := \Psi(O)$), mert megsértik az (S5) axiómát: (J, N)



1.18. ábra. Pirossal jelölve az axiómát sértő anyagok



1.19. ábra. Kivétel után

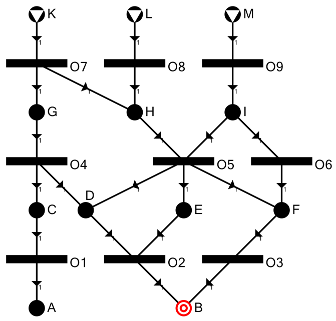
A redukciós rész véget ért, a struktúra megfelel az axiómáknak.

1.2.2. Kompozíciós rész

A kompozíciós részben a termékek felől haladunk a nyersanyagok felé. A struktúrába bevesszük azokat a műveleti egységeket, amelyekből elérhetőek a termékek. A kompozíciós részben három halmazt használunk a maximális struktúra generálásához:

- A p halmaz azokat az anyagcsomópontokat tartalmazza, amelyeket elő kell állítani. Ez kiinduláskor egyenlő a termékek halmazával. Az ábrán ezek az elemek piros színnel lesznek jelölve.
- Az m halmaz azokat az anyagcsomópontokat tartalmazza, amelyeket már megvizsgáltunk, és előállítottunk. Az algoritmus indulásakor ez a halmaz üres. Ezek a csomópontok az ábrán kék színnel lesznek jelölve.

- Az o halmaz azokat a műveleti egységeket tartalmazza, amelyeket már beválasztottunk a maximális struktúrába. Induláskor ez a halmaz szintén üres.



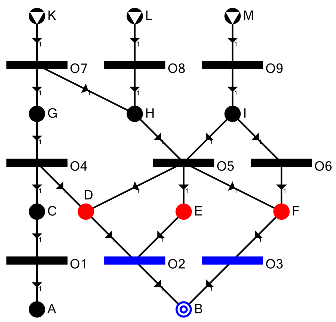
1.20. ábra. Kompozíciós rész kiinduló struktúra

A kompozíció egy iterációjában a p halmazból kiválasztunk egy x anyagot (mely most B), és

- x-et berakjuk az m halmazba($m := mU\{x\}$),
- berakjuk a B-t előállítani képes egységeket ($ox := \Phi - (\{x\})$) az o halmazba ($o := o \bigcup ox$)
- az újonnan bevett műveleti egységek bemeneti anyagai közül azokat, amelyek nem nyersanyagok és még nem vizsgáltul őket, berakjuk az előállítandó anyagok közé ($p := (p \bigcup \Psi - (ox))\ (R \bigcup m)$).

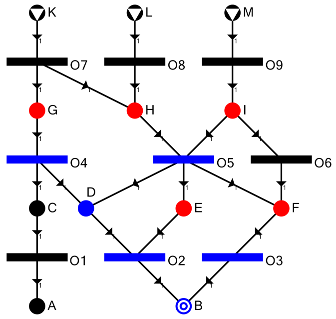
A kompozíciós rész iterációi

- Az első iterációban B anyagot tudjuk kiválasztani. Ezt az anyagot az $O2$ és $O3$ műveleti egység tudja előállítani, ezt bevesszük a struktúrába. Az $O2$ műveleti egység bemeneti anyaga a D és E anyag, amelyek nem nyersanyagok, és még nem vizsgáltuk, ezért berakjuk a p halmazba; az $O3$ műveleti egység bemeneti anyaga az F anyag, amely nem nyersanyag, és még szintén nem vizsgáltuk, ezért berakjuk a p halmazba, ahonnan végül eltávolítjuk a B anyagot.



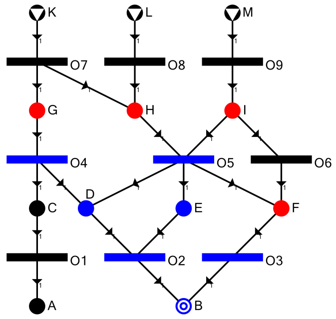
1.21. ábra. Az első iteráció utáni hálózat

- A második iterációban a D anyagot vizsgáljuk, ami alapján az $O4$ és $O5$ egységek kerülnek bele a struktúrába. Az $O4$ és $O5$ egységek bemeneti anyagai az G, H, I. Ezek kerülnek most a p halmazba, ahonnan eltávolítjuk D-t.



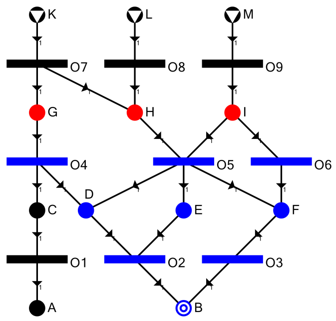
1.22. ábra. A második iteráció utáni hálózat

- A harmadik iterációban az E elemet vizsgáljuk. Ezt az elemet csak az $O5$ állítja elő, mely már szerepel a struktúrában. A p halmazból akkor eltávolítjuk E-t.



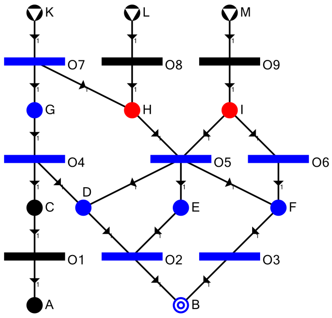
1.23. ábra. A harmadik iteráció utáni hálózat

- A negyedik iterációban az F anyagot vizsgáljuk, ami alapján az $O5$ és $O6$ egységek kerülnének bele a struktúrába, de az $O5$ annak már része, így új elemként csak az $O6$ kerül bele. Az $O6$ egység bemeneti anyaga az I, mely már szerepel a p halmazban, ahonnan most eltávolítjuk F-t.



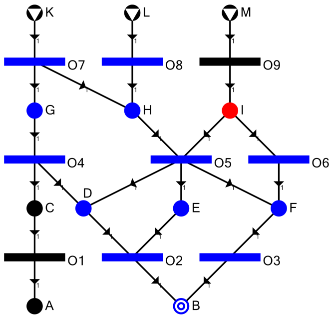
1.24. ábra. A negyedik iteráció utáni hálózat

- Az ötödik iterációban a G anyagot vizsgáljuk, ami alapján $O7$ egység kerül bele a struktúrába. Az $O7$ egység bemeneti anyaga a K, mely nyersanyag, így nem kell hozzáadni a p halmazhoz.



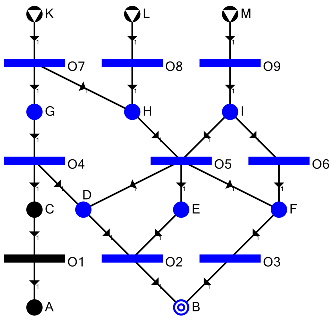
1.25. ábra. Az ötödik iteráció utáni hálózat

- A hatodik iterációban a H anyagot vizsgáljuk, ami alapján $O8$ egység kerül bele a struktúrába. Az $O8$ egység bemeneti anyaga az L, mely nyersanyag, így nem kell hozzáadni a p halmazhoz.



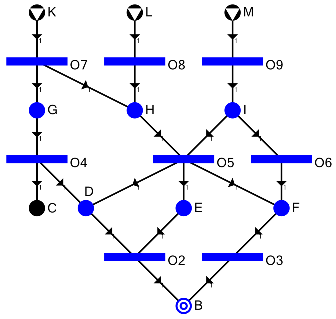
1.26. ábra. A hatodik iteráció utáni hálózat

- A hetedik iterációban a p halmazban kizárólag I anyag van, ezért ennek vizsgálatára kerül sor. Ezt az anyagot csak az $O9$ műveleti egység állítja elő, ezért hozzáadjuk a struktúrához. Az $O9$ bemeneti anyaga az M anyag, mely nyersanyag, így nem kell hozzáadni a p halmazhoz.



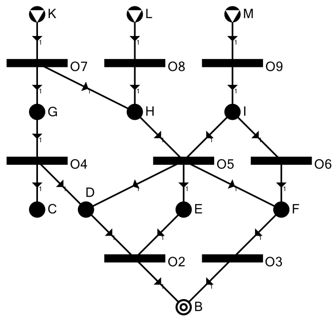
1.27. ábra. A hetedik iteráció utáni hálózat

A hetedik iteráció után a p halmaz üres, azaz az összes olyan anyagot megvizsgáltuk, amely B termékből elérhető a nyilakon visszafelé haladva. Látható, hogy az $O1$ műveleti egység nem került bele a struktúrába, mivel az megsérti az (S4) axiómát.



1.28. ábra. A hatodik iteráció utáni hálózat

Az algoritmus kimenete egy (m, o) pár, ahol m a maximális struktúrában szereplő anyagok, o pedig az itt szereplő műveleti egységek halmaza. A példa maximális struktúrája az 1.29-es ábrán látható.



1.29. ábra. A hatodik iteráció utáni hálózat

2. PÉLDATÁR

SSG példák

2.1. SSG első példa

2.1.1. Jelölések

Anyagok:

- **kék szín:** azok az anyagok, amelyek előállításáról még dönteni kell (a p halmaz elemei)
- **zöld szín:** azok az anyagok, amelyek előállításáról már döntöttünk
- **fekete szín:** a többi anyag, amelyeket még nem értünk el, vagy nem kell dönteni az előállításukról.

Műveleti egységek:

- **zöld szín:** a struktúrába bevett műveleti egységek
- **piros szín:** a struktúrából kizárt műveleti egységek
- **fekete szín:** a többi műveleti egység, amelyről még nem született döntés

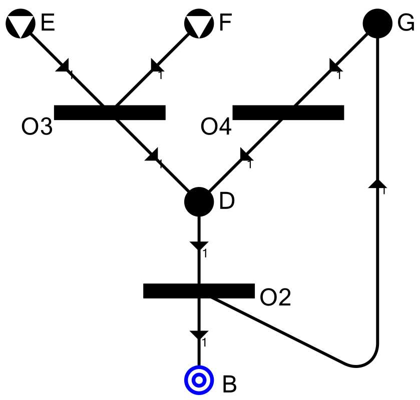
2.1.2. Futtatás:

Az első futtatás során a $p = \{B\}$ halmazból kiválasztott x anyag csak a B lehet (2.1-es ábra).

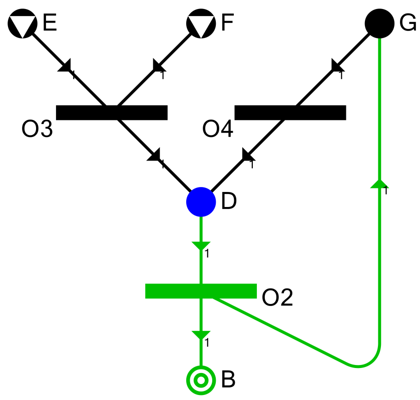
Ezt egyedül az $O2$ műveleti egység képes előállítani, így beválasztjuk a struktúrába: $c = O2$ A rekurzív hívás során a paraméterek rendre

- $\{D\}$, mivel ez az $O2$ műveleti egység egyetlen bemeneti anyaga, és erről kell dönteni a következő híváskor.
- $\{B\}$, mivel a B anyagról döntünk, és
- $\{(B, \{O2\})\}$, mivel B anyagnál $O2$ bevétele a döntés.

A gráf a 2.2-es ábrán látható és azonosítója X1.



2.1. ábra



2.2. ábra. Azonosító: X1

Ezek után ezt az X1 esetet kell tovább vizsgálni. Ebben az esetben a hívási paraméterek $p = D$, $m = B$ és $\delta[m] = \{(B, \{O2\})\}$. A p halmazban most is egyetlen elem szerepel, ezért $x = D$. Ezt az anyagot már két műveleti egységgel lehet előállítani, mégpedig $O3$ és $O4$-el. Ekkor három döntésünk van:

- Kizárólag $O3$ műveleti egység állítja elő D-t.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O3\}$, átadott paraméterek rendre

  - null, hiszen az E és F anyagok nem kerülnek átadásra, hiszen nyersanyagok, így előállításukról nem kell dönteni,
  - $\{B, D\}$, mivel ezekről született eddig döntés: $\Big\{\big(B, \{O2\}\big)\Big\}$, $\Big\{\big(D, \{O3\}\big)\Big\}$.

  A híváshoz tartozó gráf a 2.3-as ábrán látható és azonosítója X11.

- Kizárólag $O4$ műveleti egység állítja elő D-t.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O4\}$, átadott paraméterek rendre:

  - $\{G\}$, mivel $O4$-nek ez az egyetlen bemeneti anyaga,
  - $\{B, D\}$, mivel ezekről született eddig döntés: $\Big\{\big(B, \{O2\}\big)\Big\}$, $\Big\{\big(D, \{O4\}\big)\Big\}$.

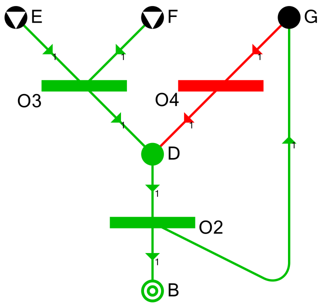
  A híváshoz tartozó gráf a 2.4-es ábrán látható és azonosítója X12.

- $O3$ és $O4$ műveleti egység is részt vesz D előállításában.

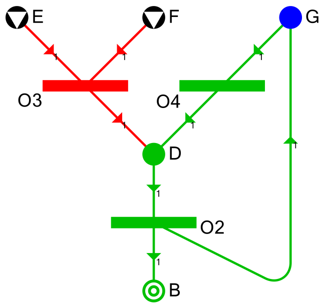
  Ebben az esetben a döntés $c = \{O3, O4\}$, átadott paraméterek rendre:

  - $\{G\}$ mivel ez az egyetlen bemeneti anyag a választott műveleti egységeknél, ami nem nyersanyag,
  - $\{B, D\}$ mivel ezekről született eddig döntés: $\Big\{\big(B, \{O2\}\big)\Big\}$, $\Big\{\big(D, \{O3, O4\}\big)\Big\}$.

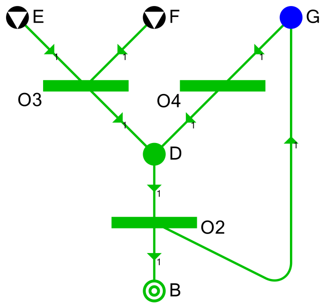
  A híváshoz tartozó gráf a 2.5-ös ábrán látható és azonosítója X13.



2.3. ábra. Azonosító: X11



2.4. ábra. Azonosító: X12

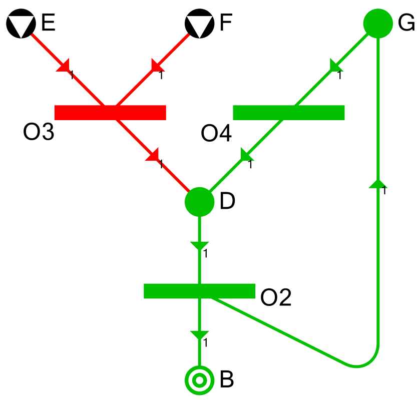


2.5. ábra. Azonosító: X13

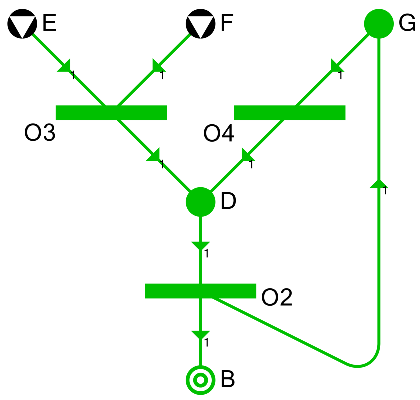
Az X11 esetben megoldásstruktúrához értünk el, mert nincs több anyag, amiről döntenünk kéne.

Az X12 és X13 esetben a G anyag beválasztásra kerül, a konzisztencia miatt, hiszen az azt előállító $O2$ műveleti egységet már korábban beválasztottuk, a megoldásstruktúrák azonosítója rendre X121, és X131.

Az X12 megoldásstruktúrához tartozó gráf a 2.6-os ábrán, míg az X13-hoz tartozó az a 2.7-es ábrán látható.

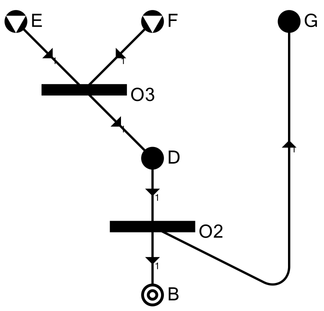


2.6. ábra. Az X12 megoldásstruktúrához tartozó gráf

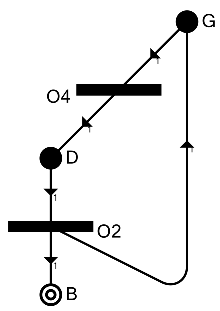


2.7. ábra. AZ X13 megoldásstruktúrához tartozó gráf

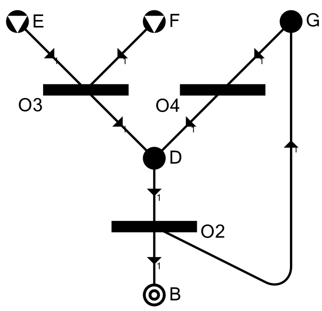
2.1.3. A lehetséges megoldásstruktúrák



2.8. ábra. $\{O2, O3\}$, azonosító: X11



2.9. ábra. $\{O2, O4\}$, azonosító: X121



2.10. ábra. $\{O2, O3, O4\}$, azonosító: X131

2.2. SSG második példa

2.2.1. Jelölés:

Anyagok:

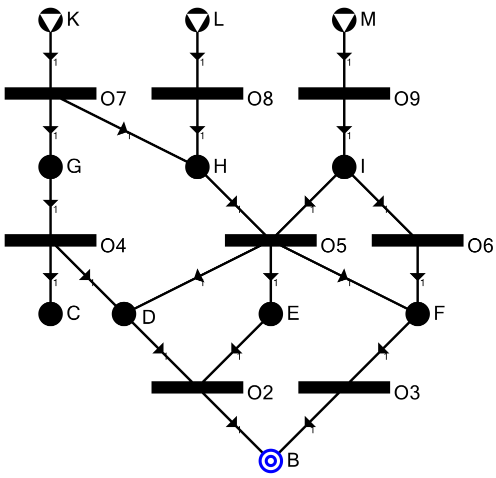
- **kék szín:** azok az anyagok, amelyek előállításáról még dönteni kell (a p halmaz elemei)
- **zöld szín:** azok az anyagok, amelyek előállításáról már döntöttünk
- **fekete szín:** a többi anyag, amelyeket még nem értünk el, vagy nem kell dönteni az előállításukról.

Műveleti egységek:

- **zöld szín:** a struktúrába bevett műveleti egységek
- **piros szín:** a struktúrából kizárt műveleti egységek
- **fekete szín:** a többi műveleti egység, amelyről még nem született döntés

2.2.2. Futtatás:

Az első futtatás során a $p = \{B\}$ halmazból kiválasztott x anyag csak a B lehet (2.11-es ábra).



2.11. ábra

Ezt az $O2$ és $O3$ műveleti egységek képesek előállítani, ezek alapján három döntésünk lehet:

- Kizárólag $O2$ műveleti egység állítja elő B-t.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O2\}$, átadott paraméterek rendre:

  - $\{D, E\}$, mivel ezek az $O2$ bemenetei, és ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B\}$, mivel erről született eddig döntés
  - $\Big\{\big(B, \{O2\}\big)\Big\}$, mivel B anyag esetén $O2$ bevétele a döntés.

  A híváshoz tartozó gráf a 2.12-es ábrán látható és azonosítója X1.

- Kizárólag $O3$ műveleti egység állítja elő B-t.

  Ebben az esetben a döntés c = O3, átadott paraméterek rendre:

  - $\{F\}$, mivel ez az $O3$ bemenete, és erről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B\}$, mivel erről született eddig döntés
  - $\Big\{\big(B, \{O3\}\big)\Big\}$, mivel B anyag esetén $O3$ bevétele a döntés.

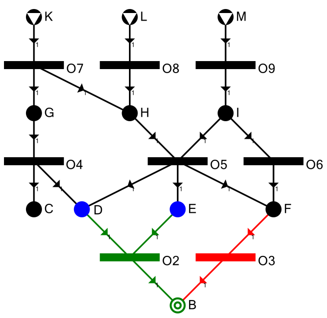
  A híváshoz tartozó gráf a 2.13-as ábrán látható és azonosítója X2.

- $O3$ és $O2$ műveleti egység is részt vesz D előállításában.

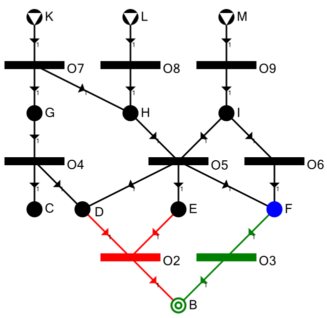
  Ebben az esetben a döntés $c = \{O2, O3\}$, átadott paraméterek rendre

  - $\{D, E, F\}$, mivel ez az $O2$, $O3$ bemenete, és erről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B\}$ mivel erről született eddig döntés
  - $\Big\{\big(B, \{O2, O3\}\big)\Big\}$, mivel B anyag esetén $O2$ és $O3$ bevétele a döntés).

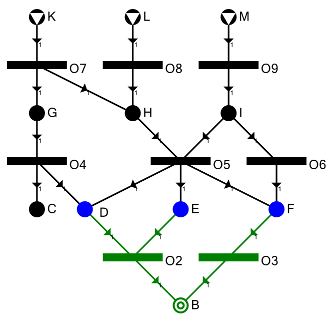
  A híváshoz tartozó gráf a 2.14-es ábrán látható és azonosítója X3.



2.12. ábra. Azonosító: X1



2.13. ábra. Azonosító: X2



2.14. ábra. Azonosító: X3

Mind a három részt külön-külön meg kell vizsgálni.

2.2.2.1. Az X1 ág kifejtése

Elsőként vizsgáljuk az X1 esetet, amikor csak $O2$ egység állítja elő B-t. Ebben az esetben a hívási paraméterek $p = \{D\}$, $m = \{B\}$ és $\delta[m] = \{(B, \{O2\})\}$. A halmazban most két elem szerepel: D és E. Válasszuk D elemet. Ezt $O4$ és $O5$ egység is előállítja, így újra három döntésünk lehet:

- Kizárólag $O4$ műveleti egység állítja elő D-t.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O4\}$, átadott paraméterek rendre:

  - $\{G, E\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B, D\}$, mivel ezekről született eddig döntés
  - $\Big\{\big(B, \{O2\}\big), \big(D, \{O4\}\big)\Big\}$, mivel D anyag esetén $O4$ bevétele a döntés.

  A híváshoz tartozó gráf a 2.15-ös ábrán látható és azonosítója X11.

- Kizárólag $O5$ műveleti egység állítja elő D-t.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O5\}$, átadott paraméterek rendre:

  - $\{H, I, E\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B, D\}$, mivel erről született eddig döntés
  - $\Big\{\big(B, \{O2\}\big), \big(D, \{O5\}\big)\Big\}$, mivel D anyag esetén $O5$ bevétele a döntés.

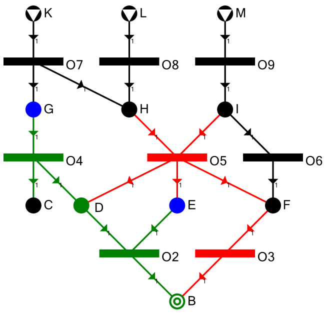
A híváshoz tartozó gráf a 2.16-os ábrán látható és azonosítója X12.

- $O4$ és $O5$ műveleti egység is részt vesz D előállításában.

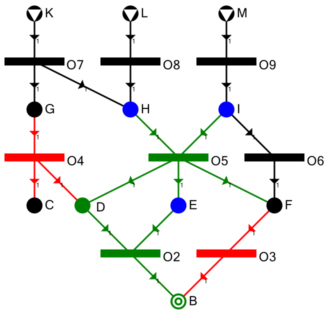
  Ebben az esetben a döntés $c = \{O4, O5\}$, átadott paraméterek rendre:

  - $\{G, H, I, E\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B, D\}$, mivel erről született eddig döntés
  - $\Big\{(B, \{O2\}), (D, \{O4, O5\})\Big\}$.

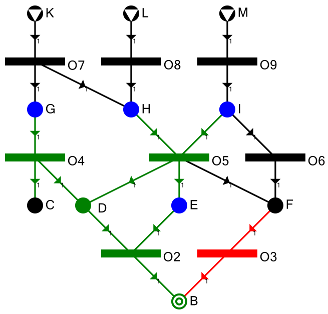
  A híváshoz tartozó gráf a 2.17-es ábrán látható és azonosítója X13.



2.15. ábra. Azonosító: X11



2.16. ábra. Azonosító: X12



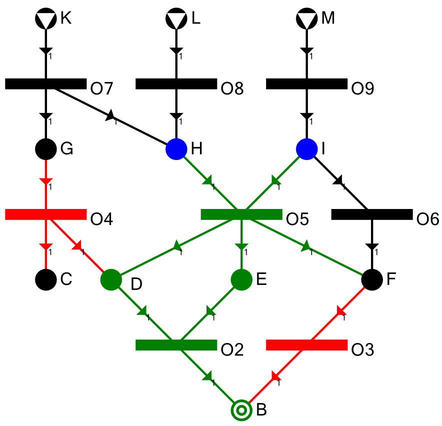
2.17. ábra. Azonosító: X13

A következő lépésben X11-et fejtjük tovább. Az E anyagot, amiről döntenünk kellene csak egyetlen műveleti egység, az $O5$ állítja elő, amit egy korábbi lépésben már kizártunk, így inkonzisztenciához jutunk. Az X11 levezetés inkonzisztens, így nem vizsgáljuk tovább.

Az X12-es lépésben az E anyagról döntünk. Ezt kizárólag $O5$ állítja elő, melyet már korábban beválasztottunk a struktúrába, az átadott paraméterek rendre:

- $\{H, I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
- $\{B, D, E\}$, mivel erről született eddig döntés,
- $\Big\{(B, \{O2\}), (D, \{O5\}), (E, \{O5\})\Big\}$.

A híváshoz tartozó gráf a 2.18-as ábrán látható és azonosítója X121.



2.18. ábra. Azonosító: X121

A következő lépésben az X121-et fejtjük tovább. Ekkor H anyagról döntünk. H-t $O7$ és $O8$ állítja elő, így szintén három döntésünk lehet:

- Kizárólag $O7$ műveleti egység állítja elő H-t.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O7\}$, átadott paraméterek rendre:

  - $\{I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B, D, E, H\}$, mivel ezekről született eddig döntés
  - $\Big\{(B, \{O2\}), (D, \{O5\}), (E, \{O5\}), (H, \{O7\})\Big\}$. A K anyag nyersanyag, így arról nem kell döntenünk.

  A híváshoz tartozó gráf a 2.19-es ábrán látható és azonosítója X1211.

- Kizárólag $O8$ műveleti egység állítja elő H-t.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O8\}$, átadott paraméterek rendre

  - $\{I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B, D, E, H\}$, mivel ezekről született eddig döntés
  - $\Big\{(B, \{O2\}), (D, \{O5\}), (E, \{O5\}), (H, \{O8\})\Big\}$. Az L anyag nyersanyag, így arról nem kell döntenünk.

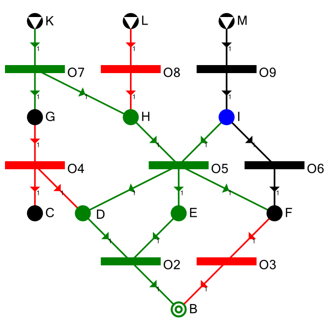
  A híváshoz tartozó gráf a 2.20-as ábrán látható és azonosítója X1212.

- $O7$ és $O8$ műveleti egység is részt vesz H előállításában.

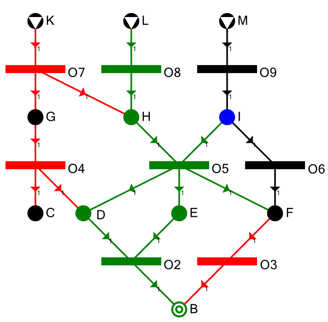
  Ebben az esetben a döntés $c = \{O7, O8\}$, átadott paraméterek rendre:

  - $\{I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B, D, E, H\}$, mivel erről született eddig döntés
  - $\Big\{(B, \{O2\}), (D, \{O5\}), (E, \{O5\}), (H, \{O7, O8\})\Big\}$.

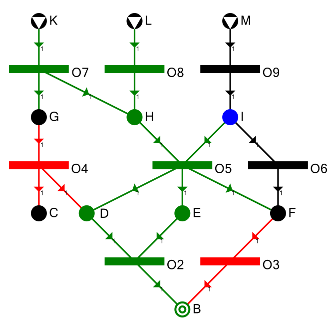
  A híváshoz tartozó gráf a 2.21-es ábrán látható és azonosítója X1213.



2.19. ábra. Azonosító: X1211

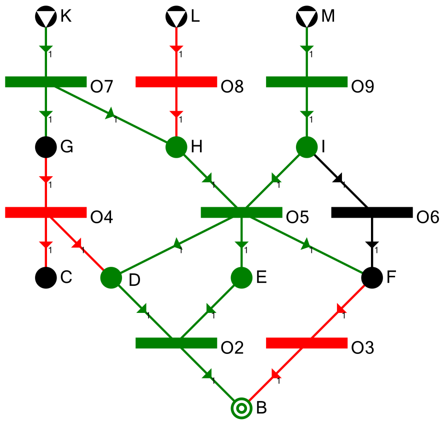


2.20. ábra. Azonosító: X1212



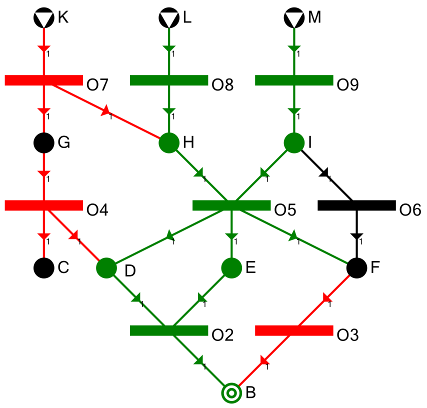
2.21. ábra. Azonosító: X1213

A következő lépésben az X1211-et fejtjük tovább. Ekkor I anyagról döntünk. I-t csak $O9$ állítja elő, így bevesszük a struktúrába. Bemenete, az M nyersanyag, így erről nem kell döntést hozni. A p halmaz üres, nincs olyan anyag (ezen a levezetésen) amiről a továbbiakban dönteni kéne, így egy lehetséges megoldást kaptunk. A híváshoz tartozó gráf a 2.22-es ábrán látható és azonosítója X12111.

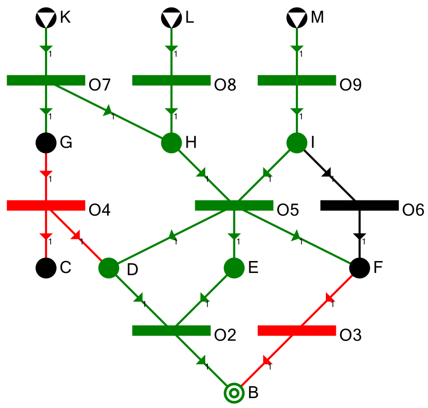


2.22. ábra. Azonosító: X12111 (megoldás)

Az X1212 és az X1213 kifejtése hasonló, mint az X1211. A előbbi hívásához tartozó gráf a 2.23-as ábrán látható és azonosítója X12121, utóbbihoz tartozó gráf a 2.24-es ábrán látható és azonosítója X12131. Mindkét eset egy megoldás.



2.23. ábra. Azonosító: X12121 (megoldás)

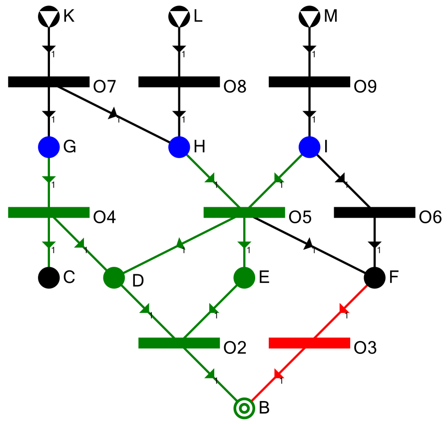


2.24. ábra. Azonosító: X12131 (megoldás)

Az X13 kifejtésénél az E anyagról kell dönteni. Ezt kizárólag $O5$ állítja elő, melyet már korábban beválasztottunk a struktúrába, az átadott paraméterek rendre:

- $\{G, H, I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
- $\{B, D, E\}$, mivel erről született eddig döntés
- $\Big\{(B, \{O2\}), (D, \{O4, O5\}), (E, \{O5\})\Big\}$.

A híváshoz tartozó gráf a 2.25-ös ábrán látható és azonosítója X131.

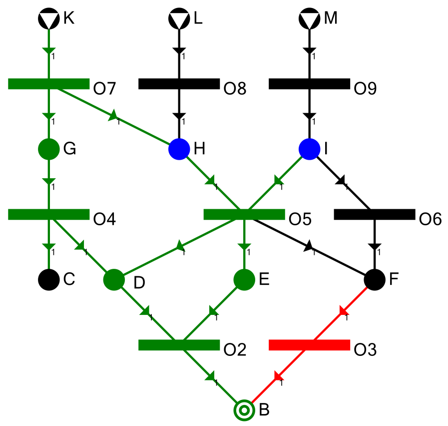


2.25. ábra. Azonosító: X131

Az X131 kifejtésénél a G anyagról döntünk, melyet csak $O7$ állít elő, így bevesszük a struktúrába. Ebben az esetben a döntés $c = \{O7\}$, átadott paraméterek rendre:

- $\{H, I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
- $\{B, D, E, G\}$, mivel erről született eddig döntés
- $\Big\{(B, \{O2\}), (D, \{O4, O5\}), (E, \{O5\}), (G, \{O7\})\Big\}$.

A híváshoz tartozó gráf a 2.26-os ábrán látható és azonosítója X1311.



2.26. ábra. Azonosító: X1311

Az X1311 kifejtésénél H elemről döntünk. Ezt $O7$ és $O8$ műveleti egység is előállítja, így újra három döntésünk lehet:

- Kizárólag $O7$ műveleti egység állítja elő H-t.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O7\}$, átadott paraméterek rendre:

  – $\{I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,

  – $\{B, D, E, G, H\}$, mivel ezekről született eddig döntés

  – $\Big\{(B, \{O2\}), (D, \{O4, O5\}), (E, \{O5\}), (G, \{O7\}), (H, \{O7\})\Big\}$.

  A híváshoz tartozó gráf a 2.27-es ábrán látható és azonosítója X13111.

- Kizárólag $O8$ műveleti egység állítja elő H-t.

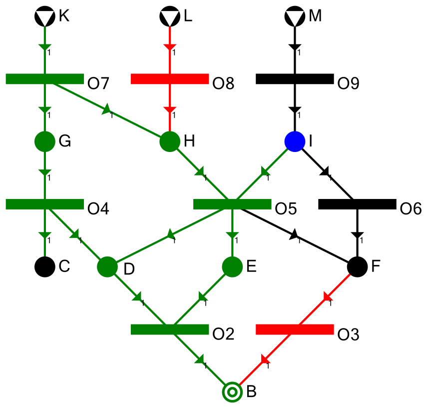
Ekkor $O7$ kizárásra kerülne, de ezt már egy korábbi lépésben bevettük a struktúrába, így inkonzisztens lenne az állapot. A lépés azonosítója X13112, a továbbiakban nem kerül további kifejtésre.

- $O7$ és $O8$ műveleti egység is részt vesz H előállításában.

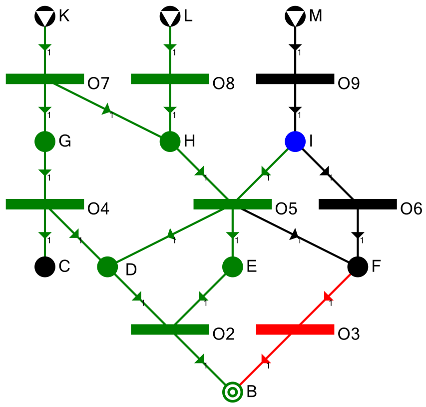
  Ebben az esetben a döntés $c = \{O7, O8\}$, átadott paraméterek rendre:

  – $\{I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  – $\{B, D, E, G, H\}$, mivel erről született eddig döntés
  – $\Big\{(B, \{O2\}), (D, \{O4, O5\}), (E, \{O5\}), (H, \{O7, O8\})\Big\}$.

  A híváshoz tartozó gráf a 2.28-as ábrán látható és azonosítója X13113.



2.27. ábra. Azonosító: X13111



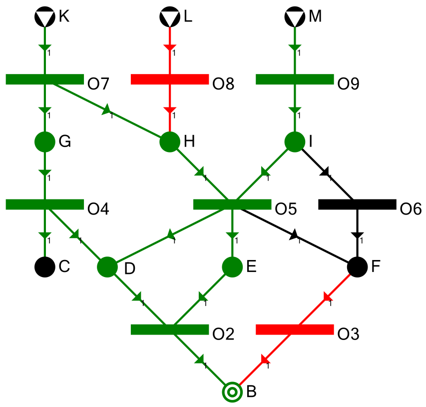
2.28. ábra. Azonosító: X13113

Az X13111 kifejtésénél már csak I anyagról kell dönteni. Ezt egyedül $O9$ egység állítja elő, így bevesszük a struktúrába. Ebben az esetben a döntés $c = \{O9\}$, átadott paraméterek rendre:

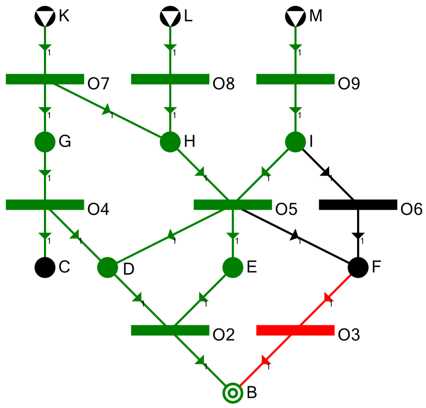
- null, mivel p halmaz üres lett,
- $\{B, D, E, G, H, I\}$, mivel erről született eddig döntés
- $\Big\{(B, \{O2\}), (D, \{O4, O5\}), (E, \{O5\}), (G, \{O7\}), (H, \{O7\}), (I, \{O9\})\Big\}$.

A híváshoz tartozó gráf a 2.29-es ábrán látható és azonosítója X131111. Ez szintén egy megoldásstruktúra.

Az X13113 kifejtése az X13111-hez hasonló, és szintén megoldásstruktúrához vezet. A híváshoz tartozó gráf a 2.30-as ábrán látható és azonosítója X131131.



2.29. ábra. Azonosító: X131111 (megoldás)



2.30. ábra. Azonosító: X131131 (megoldás)

Véget ért az X1 ág kifejtése, az X2 ág kifejtése következik.

2.2.2.2. Az X2 ág kifejtése

Ekkor csak egy anyagról kell döntenünk: F. Ezt két egység is előállítja: $O5$ és $O6$. Ekkor három lehetőségünk van:

- Kizárólag $O5$ műveleti egység állítja elő F-t.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O5\}$, átadott paraméterek rendre:

  – $\{H, I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  – $\{B, F\}$, mivel ezekről született eddig döntés
  – $\Big\{(B, \{O3\}), (F, \{O5\})\Big\}$.

  A híváshoz tartozó gráf a 2.31-es ábrán látható és azonosítója X21.

- Kizárólag $O6$ műveleti egység állítja elő F-et.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O6\}$, átadott paraméterek rendre:

  – $\{I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  – $\{B, F\}$, mivel ezekről született eddig döntés
  – $\Big\{(B, \{O3\}), (F, \{O6\})\Big\}$.

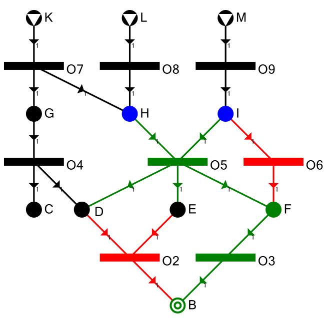
  A híváshoz tartozó gráf a 2.32-es ábrán látható és azonosítója X22.

- $O5$ és $O6$ műveleti egység is részt vesz F előállításában.

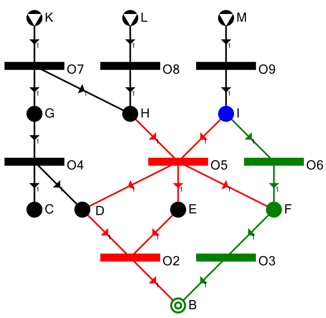
  Ebben az esetben a döntés $c = \{O5, O6\}$, átadott paraméterek rendre:

  – $\{H, I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  – $\{B, F\}$, mivel erről született eddig döntés
  – $\Big\{(B, \{O3\}), (F, \{O5, O6\})\Big\}$.

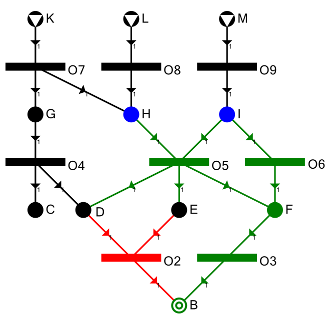
  A híváshoz tartozó gráf a 2.33-as ábrán látható és azonosítója X23.



2.31. ábra. Azonosító: X21



2.32. ábra. Azonosító: X22



2.33. ábra. Azonosító: X23

Következő lépésben az X21 kerül kifejtésre. Első körben a H anyagról döntünk. Ezt $O7$ és $O8$ egység állítja elő. Ekkor három lehetőségünk van:

- Kizárólag $O7$ műveleti egység állítja elő H-t.

  Ebben az esetben a döntés $c = \{O7\}$, átadott paraméterek rendre:

  – $\{I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  – $\{B, F, H\}$, mivel ezekről született eddig döntés

- $\Big\{(B, \{O3\}), (F, \{O5\}), (H, \{O7\})\Big\}$.

  A híváshoz tartozó gráf a 2.34-es ábrán látható és azonosítója X211.

- Kizárólag $O8$ műveleti egység állítja elő H-t.

  Ebben az esetben a döntés $= \{O8\}$, átadott paraméterek rendre:

  - $\{I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B, F, H\}$, mivel ezekről született eddig döntés
  - $\Big\{(B, \{O3\}), (F, \{O5\}), (H, \{O8\})\Big\}$.

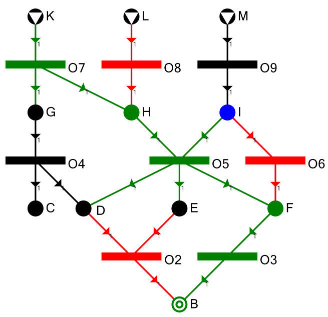
  A híváshoz tartozó gráf a 2.35-ös ábrán látható és azonosítója X212.

- $O7$ és $O8$ műveleti egység is részt vesz H előállításában.

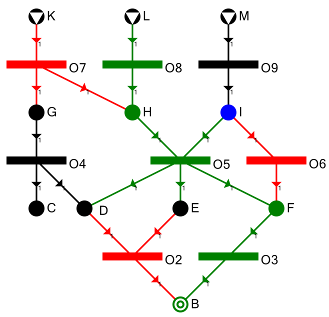
  Ebben az esetben a döntés $c = \{O7, O8\}$, átadott paraméterek rendre:

  - $\{I\}$, mivel ezekről kell döntést hozni a jövőben,
  - $\{B, F, H\}$, mivel ezekről született eddig döntés
  - $\Big\{(B, \{O3\}), (F, \{O5\}), (H, \{O7, O8\})\Big\}$.

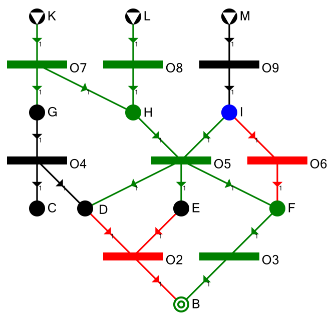
  A híváshoz tartozó gráf a 2.36-os ábrán látható és azonosítója X213.



2.34. ábra. Azonosító: X211



2.35. ábra. Azonosító: X212



2.36. ábra. Azonosító: X213

Következő lépésben az X211 kerül kifejtésre. Ekkor csak egy anyagról kell dönteni: I, melyet csupán $O9$ állít elő, ezért bevesszük a struktúrába. Ebben az esetben a döntés $c = \{O9\}$, átadott paraméterek rendre:

- null, mivel p halmaz üres lett,
- $\{B, F, H, I\}$, mivel erről született eddig döntés
- $\Big\{(B, \{O3\}), (F, \{O5\}), (H, \{O7\}), (I, \{O9\})\Big\}$.

A híváshoz tartozó gráf a 2.37-es ábrán látható és azonosítója X2111. Ez szintén egy megoldásstruktúra.

Az X212 kifejtése az X211-hez hasonló, és szintén megoldásstruktúrához vezet. A híváshoz tartozó gráf a 2.38-as ábrán látható és azonosítója X2121.

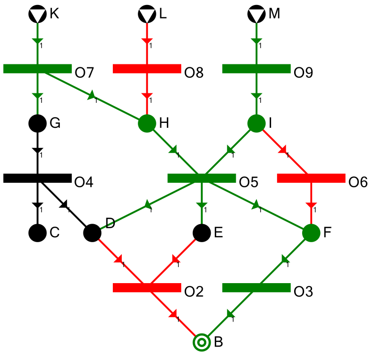
Az X213 kifejtése az előző két eset uniója, szintén megoldásstruktúra. A híváshoz tartozó gráf a 2.39-es ábrán látható és azonosítója X2131.

Az X22 esetében csak I anyagról kell döntenünk, melyet csupán $O9$ állít elő, ezért bevesszük a struktúrába. Ebben az esetben a döntés $c = \{O9\}$, átadott paraméterek rendre:

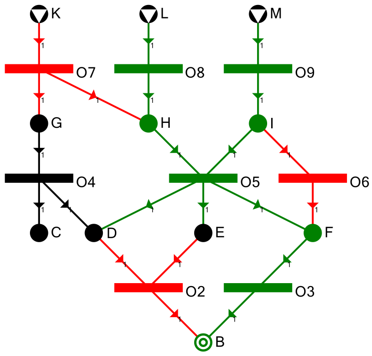
- null, mivel p halmaz üres lett,
- $\{B, F, I\}$, mivel erről született eddig döntés

- $\big\{(B,\{O3\}),(F,\{O6\}),(I,\{O9\})\big\}$. (B,O3), (F,O5), (H,O7), (I,O9).

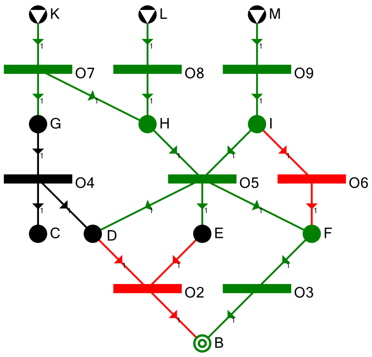
A híváshoz tartozó gráf a 2.40-es ábrán látható és azonosítója X221. Ez szintén egy megoldásstruktúra.



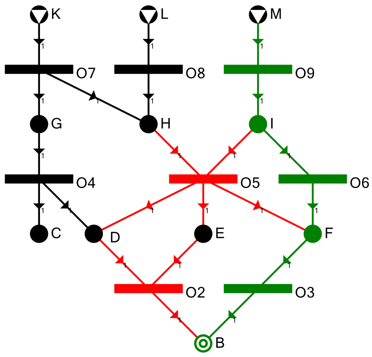
2.37. ábra. Azonosító: X2111 (megoldás)



2.38. ábra. Azonosító: X2121 (megoldás)



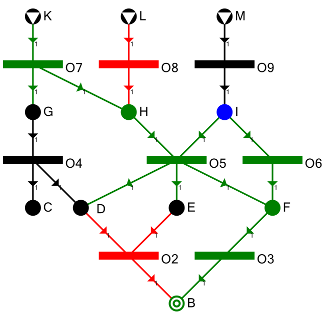
2.39. ábra. Azonosító: X2131 (megoldás)



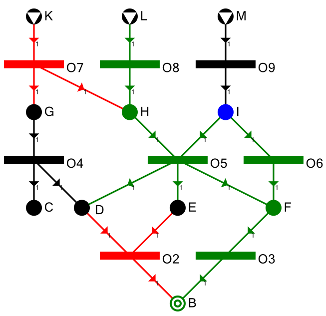
2.40. ábra. Azonosító: X221 (megoldás)

Az X23 kifejtése az X21-el azonos, annyi különbséggel, hogy itt a struktúra része $O6$ egység is, azaz F anyag előállításában $O6$ is részt vesz.

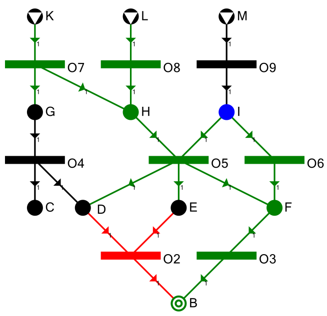
Ezen ág kifejtéséhez tartozó gráfok és azonosítójuk sorban:



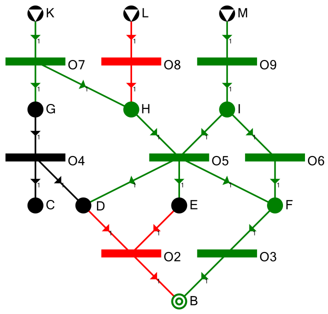
2.41. ábra. Azonosító: X231



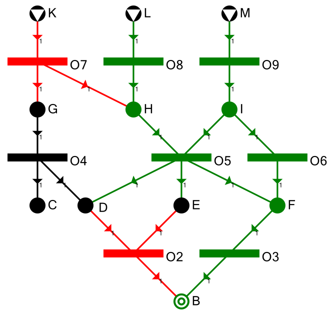
2.42. ábra. Azonosító: X232



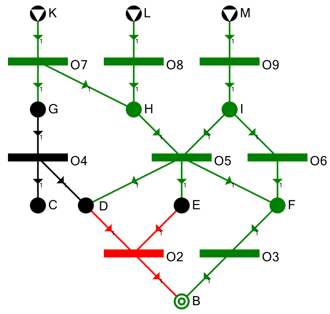
2.43. ábra. Azonosító: X233



2.44. ábra. Azonosító: X2311 (megoldás)



2.45. ábra. Azonosító: X2321 (megoldás)

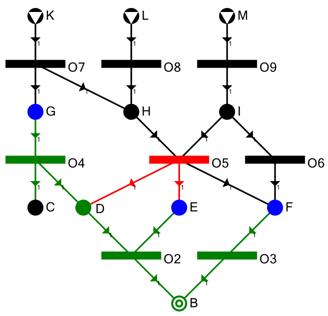


2.46. ábra. Azonosító: X2331 (megoldás)

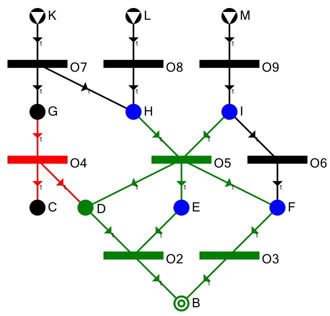
2.2.2.3. Az X3 ág kifejtése

Az X3 kifejtése az X1 és X2 uniója.

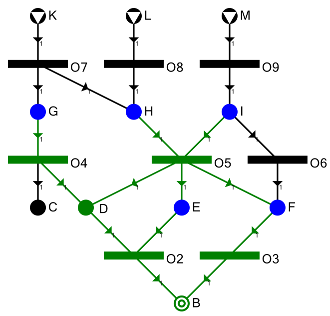
Ezen ág kifejtéséhez tartozó gráfok és azonosítójuk sorban:



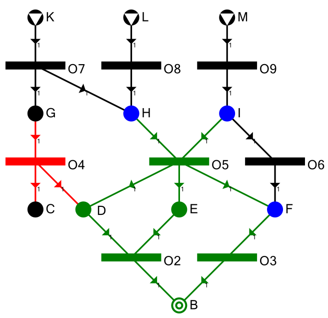
2.47. ábra. Azonosító: X31 (inkonzisztencia)



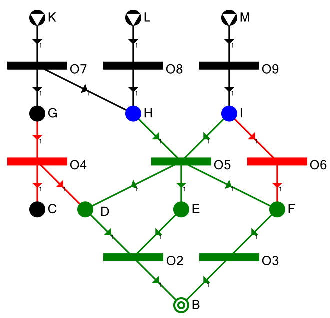
2.48. ábra. Azonosító: X32



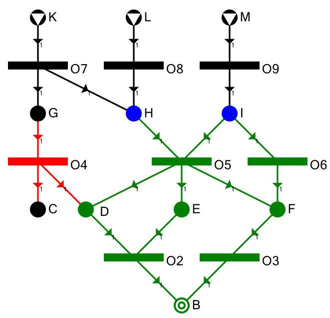
2.49. ábra. Azonosító: X33



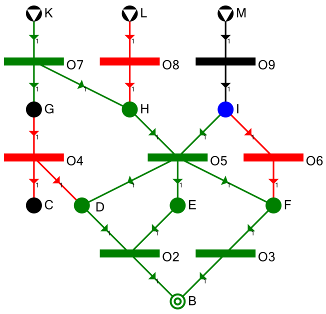
2.50. ábra. Azonosító: X321



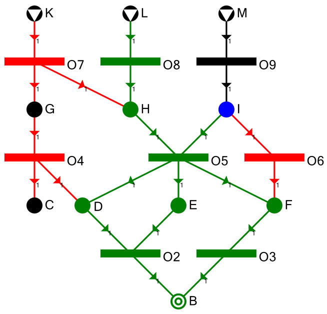
2.51. ábra. Azonosító: X3211



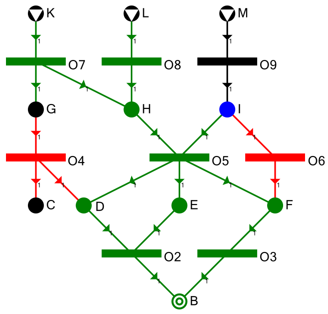
2.52. ábra. Azonosító: X3213



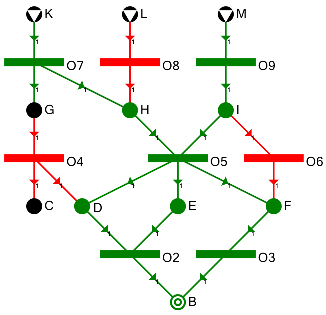
2.53. ábra. Azonosító: X32111



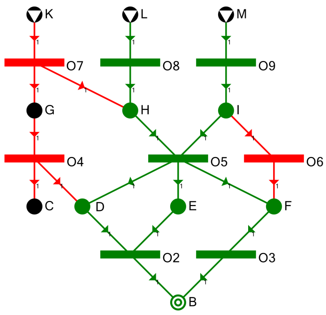
2.54. ábra. Azonosító: X32112



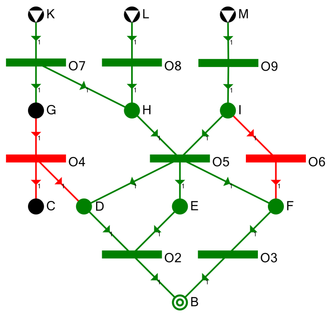
2.55. ábra. Azonosító: X32113



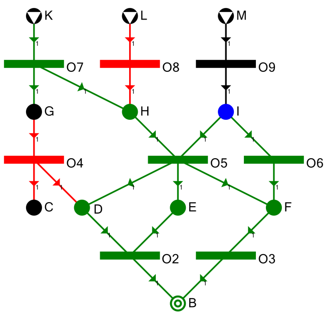
2.56. ábra. Azonosító: X321111 (megoldás)



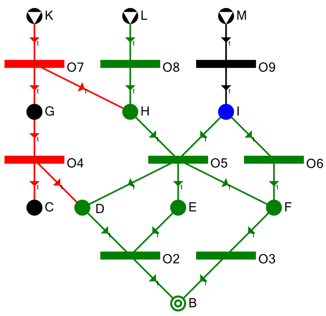
2.57. ábra. Azonosító: X321121 (megoldás)



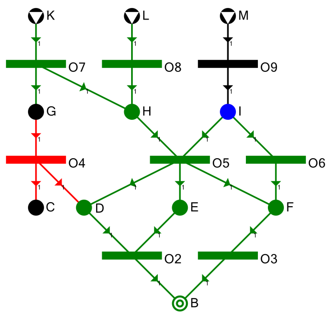
2.58. ábra. Azonosító: X321131 (megoldás)



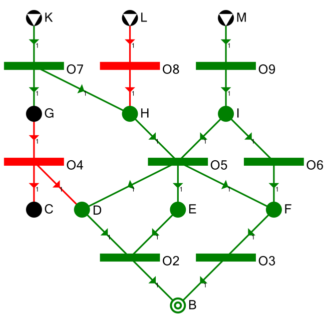
2.59. ábra. Azonosító: X32131



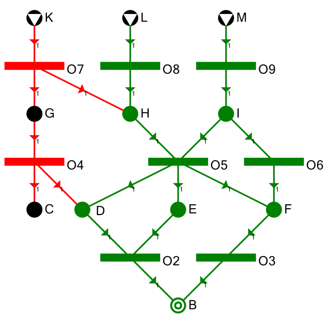
2.60. ábra. Azonosító: X32132



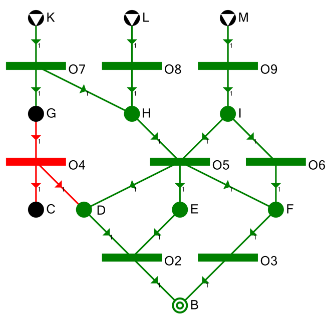
2.61. ábra. Azonosító: X32133



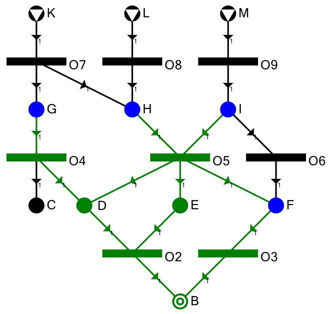
2.62. ábra. Azonosító: X321311 (megoldás)



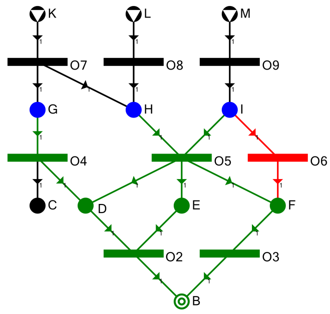
2.63. ábra. Azonosító: X321321 (megoldás)



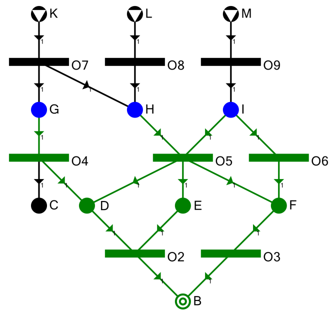
2.64. ábra. Azonosító: X321331 (megoldás)



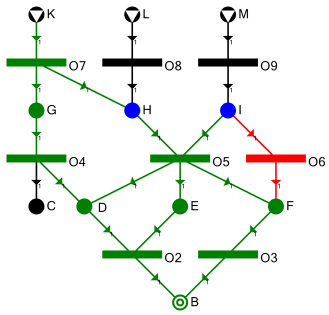
2.65. ábra. Azonosító: X331



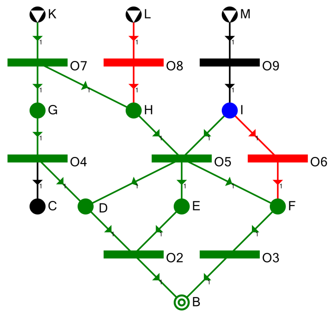
2.66. ábra. Azonosító: X3311



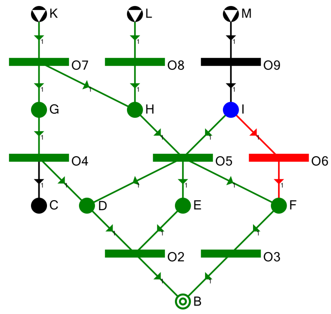
2.67. ábra. Azonosító: X3313



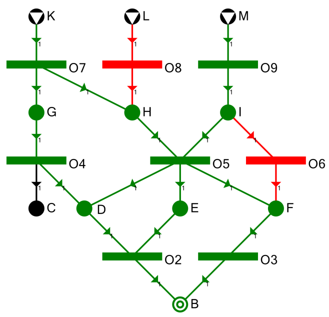
2.68. ábra. Azonosító: X33111



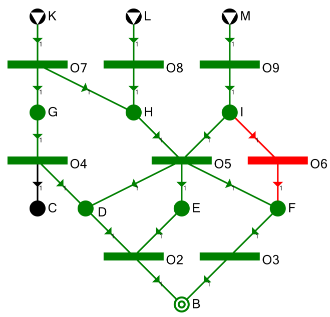
2.69. ábra. Azonosító: X331111



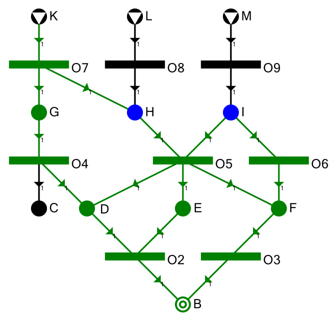
2.70. ábra. Azonosító: X33113



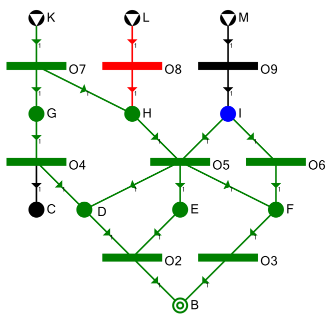
2.71. ábra. Azonosító: X3311111 (megoldás)



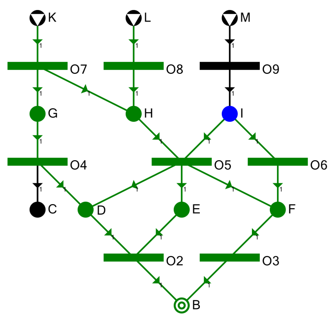
2.72. ábra. Azonosító: X3311131 (megoldás)



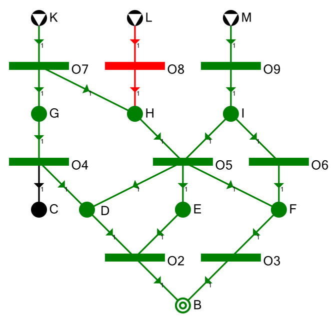
2.73. ábra. Azonosító: X33131



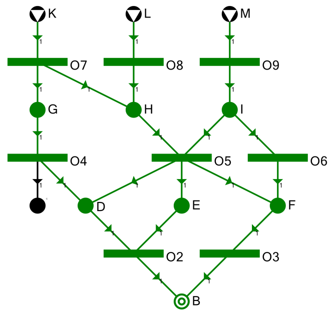
2.74. ábra. Azonosító: X331311



2.75. ábra. Azonosító: X331313



2.76. ábra. Azonosító: X3313111 (megoldás)



2.77. ábra. Azonosító: X3313131 (megoldás)

Megjegyzés. *Az ábrák közül hiányzik az X3212, X3312, X331112, valamint az X331312, mivel ezek inkonzisztensek lennének.*

Az algoritmus véget ért.

2.2.3. A lehetséges megoldásstruktúrák

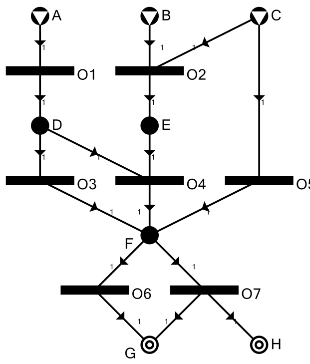
X12111	$\{O2, O5, O7, O9\}$
X12121	$\{O2, O5, O8, O9\}$
X12131	$\{O2, O5, O7, O8, O9\}$
X131111	$\{O2, O4, O5, O7, O9\}$
X131131	$\{O2, O4, O5, O7, O8, O9\}$
X2111	$\{O3, O5, O7, O9\}$
X2121	$\{O3, O5, O8, O9\}$
X2131	$\{O3, O5, O7, O8, O9\}$
X221	$\{O3, O6, O9\}$
X2311	$\{O3, O5, O6, O7, O9\}$
X2321	$\{O3, O5, O6, O8, O9\}$
X2331	$\{O3, O5, O6, O7, O8, O9\}$
X321111	$\{O2, O3, O5, O7, O9\}$
X321121	$\{O2, O3, O5, O8, O9\}$
X321131	$\{O2, O3, O5, O7, O8, O9\}$
X321311	$\{O2, O3, O5, O6, O7, O9\}$
X321321	$\{O2, O3, O5, O6, O8, O9\}$
X321331	$\{O2, O3, O5, O6, O7, O8, O9\}$
X3311111	$\{O2, O3, O4, O5, O7, O9\}$
X3311131	$\{O2, O3, O4, O5, O7, O8, O9\}$
X3313111	$\{O2, O3, O4, O5, O6, O7, O9\}$
X3313131	$\{O2, O3, O4, O5, O6, O7, O8, O9\}$

2.3. SSG harmadik példa

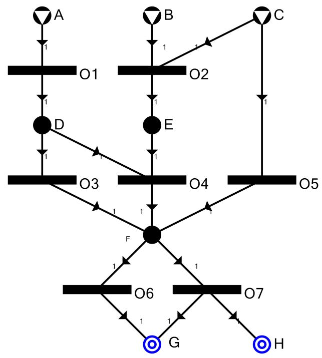
Az alábbi példában a rekurzív SSG algoritmus működését mutatjuk be lépésről lépésre. Az ábrákon színezés segít érthetőbbé tenni az előrehaladást. Zöld szín jelenti azt, hogy az adott anyag vagy műveleti egység bevételre került, piros színnel szerepelnek azon műveleti egységek, melyek kizárásra kerültek, továbbá kék színnel szerepelnek azon anyagok, melyekről a korábbiakban még nem született döntés, és döntést kell róla hozni. A példa 2 nyersanyagból állít elő 2 terméket, összesen 7 műveleti egység felhasználásával. Az anyagok és a műveleti egységek felsorolása a már megszokott jelöléssel történik:

- $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$
- $\mathcal{P} = \{G, H\}$

- $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$
- $\mathcal{O} = \Big\{O1 = (\{A\},\{D\}), O2 = (\{B\},\{E\}), O3 = (\{D\},\{F\}), O4 = (\{D,E\},\{F\}), O5 = (\{C\},\{F\}), O6 = (\{F\},\{G\}), O7 = (\{F\},\{G,H\})\Big\}$



2.78. ábra. SSG példa: A kiindulási struktúra. (X0)



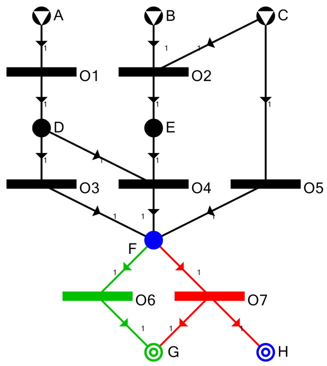
2.79. ábra. SSG példa: Első lépésben a termékek kiválasztása döntésre. (X0)

Az előrehaladást nem csak színezéssel, de számozással is jelöljük. A kiinduló struktúra mely látható az a 2.78-as ábrán legyen X0, a rekurzió haladását az X-et kiegészítő szám indexekkel, a rekurzió mélységét pedig a számok sorozatának hosszával jelöljük.

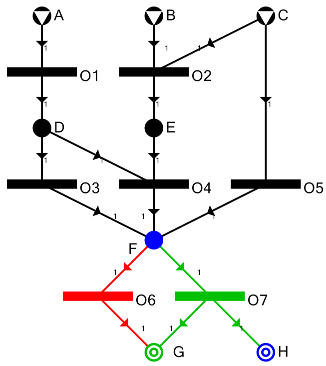
Az algoritmus inicializáláskor azon anyagok, melyekről elsőre döntést kell hozni, nem mások lesznek, mint a termékek, jelen esetben a G és a H anyagok. Ez a struktúra látható a 2.79-es ábrán.

A rekurzió első indítása során a p $= \{G, H\}$ halmazból elsőre kiválasztott anyag a G anyag. Ezt az anyagot két műveleti egység, az $O6$ és az $O7$ képes előállítani. A C $= \{O6, O7\}$. A két műveleti egységre összesen három döntésünk van.

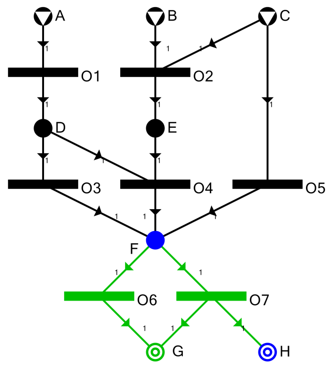
- Csak az $O6$ műveleti egység állítja elő G-t. Ebben az esetben a döntés c={O6} egy konzisztens döntés. A gráfhoz a 2.80-as ábra tartozik, és jelöljük X1-el. A továbbadott rekurzív paraméterek a következők:
  - $\{H, F\}$ mivel F az $O6$ műveleti egység bemeneti anyaga, és nem nyersanyag, így dönteni kell róla, továbbá H előállításáról eddig még nem döntöttünk.
  - $\{G\}$, mivel G anyagról a korábbiakban döntöttünk, és
  - $\Big\{(G, \{O2\})\Big\}$, mivel a G anyag előállítására ebben az esetben $O6$ volt a döntésünk.
- Csak az O7 műveleti egység állítja elő G-t. Ebben az esetben a c={O7} egy konzisztens döntés. Jelöljük X2-vel, (2.81-es ábra). A rekurzió folytatásaként a következő paramétereket kapjuk:
  - {H,F} mivel F az O7 műveleti egység bemeneti anyaga, és nem nyersanyag, így dönteni kell róla, továbbá H előállításáról eddig még nem döntöttünk.
  - {G}, mivel G anyagról a korábbiakban döntöttünk, és
  - {(G,{O2})}, mivel a G anyag előállítására ebben az esetben O7 volt a döntésünk.
- Az O6, és az O7 műveleti egység is előállítja G-t. Ebben az esetben a c={O6,O7} döntés egy konzisztens döntés. A struktúrát jelöljük X3-al (2.82-es) ábra. A továbbadott rekurzív paraméterek a következők:
  - {H,F} mivel F az O6 műveleti egység bemeneti anyaga, és nem nyersanyag, így dönteni kell róla, továbbá H előállításáról eddig még nem döntöttünk.
  - {G}, mivel G anyagról a korábbiakban döntöttünk, és
  - {(G,{O6,O7})}, mivel a G anyag előállítására ebben az esetben O6, és O7 műveleti egység volt a döntésünk.



2.80. ábra. SSG példa: G anyagot O6 állítja elő (X1)



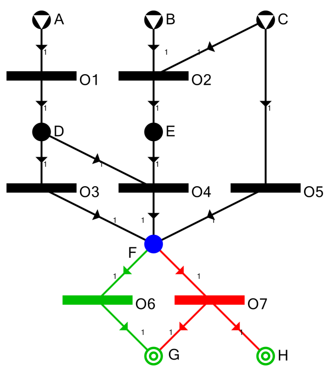
2.81. ábra. SSG példa: G anyagot O7 állítja elő (X2)



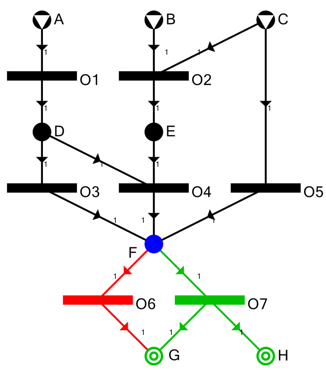
2.82. ábra. SSG példa: G anyagot O6, és O7 állítja elő (X3)

A keletkezett három részt külön-külön meg kell majd vizsgálni. Ezt a rekurzió haladásával megegyező sorrendben nézve kezdjük az X1 esettel. Ebben az esetben két anyag előállításáról kell dönteni, a H termékről, és az F köztes anyagról. Vegyük először a H anyagot. A H terméket kizárólag az O7 műveleti egység képes előállítani. Azonban vegyük észre, hogy a döntés, melyben a H terméket az O7 műveleti egység állítja elő inkonzisztens lenne, mivel korábban a G előállításakor az O7 műveleti egységet korábban kizártuk a struktúrából. Így az X1 esetet nem lehet tovább bontani. Megtalálható a 2.83-as ábrán.

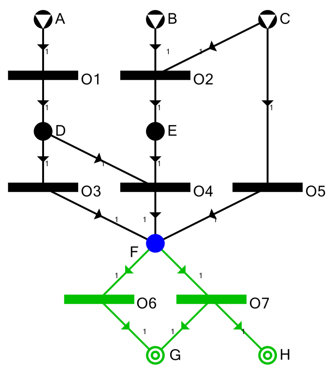
Haladjunk tovább az X2 esetre. Ekkor szintén az F és a H anyagokról nem született még döntés (p={F,H}). A H terméket most is csak egy műveleti egység képes előállítani, amely az O7. Ez a döntés jelen esetben konzisztens lesz. Így megkapjuk az X21 esetet (2.84-es) ábra. A paraméterei p={F}, m = {G,H} és δ[m] = {(G,{O7}),(H,{O7})}.



2.83. ábra. SSG példa: H anyagot O7 állítaná elő (X11)



2.84. ábra. SSG példa: H anyagot O7 állítja elő (X21)

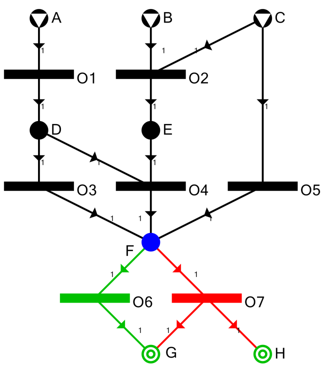


2.85. ábra. SSG példa: H anyagot O7 állítja elő (X31)

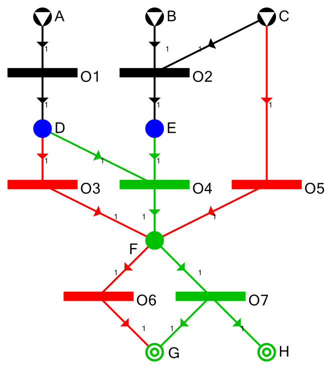
Az X21 esetet tovább bontva az F anyag előállításáról kell döntést hoznunk. Az F anyagot az O3, O4 és az O5 műveleti egységek is képesek is előállítani. Így a 3 műveleti egységre összesen 7 esetünk van:

- Az O3 műveleti egység állítja elő. Ebben az esetben c={O3} konzisztens döntés lesz. A struktúra állását jelöljük X211-el (2.86-os ábra. A paraméterek a következőképp alakulnak:
  - {D}, mivel D az O3 műveleti egység egyetlen bemeneti anyaga, és még nem született róla döntés.
  - {G,H,F}, mivel most az F anyagról döntöttünk, és korábban már döntés született a G és H anyagokról.
  - {(G,{O7}),(H,{O7}),(F,{O3})}, mivel most az F anyagról úgy döntöttünk, hogy az O3 műveleti egység állítsa csak elő.

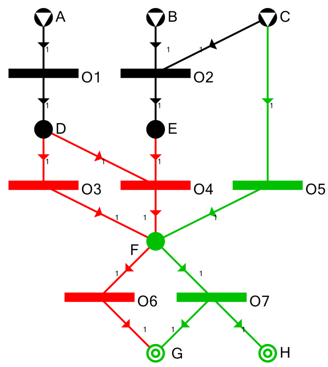
- Az O4 műveleti egység álltja csak elő. Ebben az esetben c={O4} konzisztens döntés lesz. A struktúrát jelöljük X212-vel (2.87-es) ábra. A paraméterek a következők lesznek a döntés után:
  - {D,E}, mivel D és az E anyagok az O4 anyag bemeneti anyagai, és azokról még nem született döntés korábban.
  - {G,H,F}, mivel most az F anyagról döntöttünk, és korábban már döntés született a G és H anyagokról.
  - {(G,{O7}),(H,{O7}),(F,{O4})}, mivel most az F anyagról úgy döntöttünk, hogy az O4 műveleti egység állítsa csak elő.



2.86. ábra. SSG példa: F anyagot O3 állítja elő (X211)



2.87. ábra. SSG példa: F anyagot O4 állítja elő (X212)

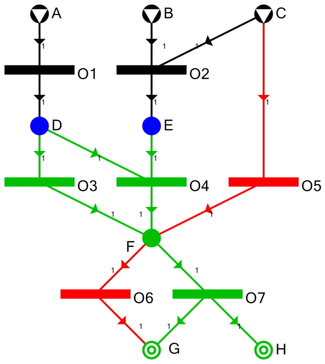


2.88. ábra. SSG példa: F anyagot O5 állítja elő (X213)

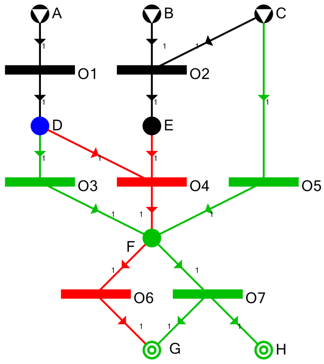
- Az O5 műveleti egység álltja csak elő. Ebben az esetben c={O5} konzisztens döntés lesz. A struktúrát jelöljük X213-al (2.88-as) ábra. Vegyük észre, hogy a p halmaz üres, azaz nincs olyan anyag, melyről döntést kellene hozni, tehát megoldás struktúrához értünk. A struktúra kiírásra kerül.

- Az O3, és az O4 műveleti egység is előállítja az F anyagot. Ebben az esetben a c={O3,O4} konzisztens döntés lesz. A struktúrát jelöljük X214-el (2.89-es) ábra. A paraméterek a következőként alakulnak:
  - {D,E}, mivel D és az E anyagok az O4 anyag bemeneti anyagai, valamint D az O3 műveleti egység bemenete is, és ezek egyikéről sem született döntés korábban.
  - {G,H,F}, mivel most az F anyagról döntöttünk, és korábban már döntés született a G és H anyagokról.
  - {(G,{O7}),(H,{O7}),(F,{O3,O4})}, mivel most az F anyagról úgy döntöttünk, hogy az O3 és O4 műveleti egységek állítsák elő.

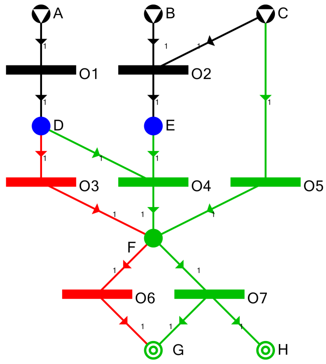
- Az O3, és az O5 műveleti egység is előállítja az F anyagot. Ebben az esetben a c={O3,O5} konzisztens döntés lesz. A struktúrát jelöljük X215-el (2.90-es) ábra. A paraméterek a következőként alakulnak:
  - {D}, mivel D az O3 műveleti egység bemeneti anyaga, továbbá az O5 műveleti egység bemeneti anyaga a C anyag nyersanyag, így annak előállításáról nem kell dönteni.
  - {G,H,F}, mivel most az F anyagról döntöttünk, és korábban már döntés született a G és H anyagokról.
  - {(G,{O7}),(H,{O7}),(F,{O3,O5})}, mivel most az F anyagról úgy döntöttünk, hogy az O3 és O4 műveleti egységek állítsák elő.



2.89. ábra. SSG példa: F anyagot O3 és O4 állítja elő (X214)

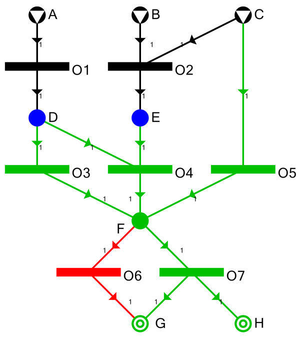


2.90. ábra. SSG példa: F anyagot O3 és O5 állítja elő (X215)



2.91. ábra. SSG példa: F anyagot O4 és O5 állítja elő (X216)

- Az O4, és az O5 műveleti egység is előállítja az F anyagot. Ebben az esetben a c={O4,O5} konzisztens döntés lesz. A struktúrát jelöljük X216-al (2.91-es) ábra. A paraméterek a következőként alakulnak:
  - {D,E}, mivel D és E az O4 műveleti egység bemeneti anyaga, továbbá az O5 műveleti egység bemeneti anyaga a C anyag nyersanyag, így annak előállításáról nem kell dönteni.
  - {G,H,F}, mivel most az F anyagról döntöttünk, és korábban már döntés született a G és H anyagokról.
  - {(G,{O7}),(H,{O7}),(F,{O4,O5})}, mivel most az F anyagról úgy döntöttünk, hogy az O3 és O4 műveleti egységek állítsák elő.

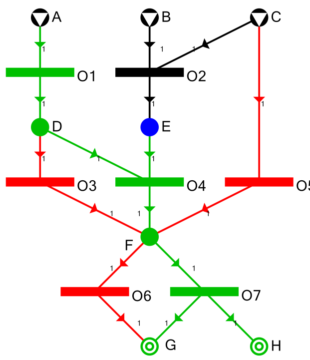


2.92. ábra. SSG példa: F anyagot O3, O4 és O5 állítja elő (X217)

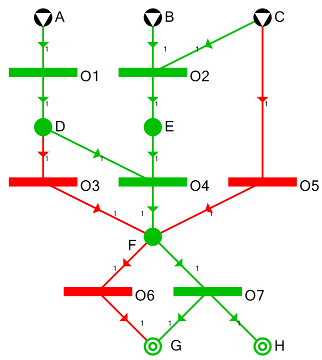
- Az O3, O4, és az O5 műveleti egység is előállítja az F anyagot. Ebben az esetben a c={O3,O4,O5} konzisztens döntés lesz. A struktúrát jelöljük X217-el (2.92+as) ábra. A paraméterek a következőként alakulnak:
  - {D,E}, mivel D és E az O4 műveleti egység bemeneti anyaga, D az O3 műveleti egység bemeneti anyaga, továbbá az O5 műveleti egység bemeneti anyaga a C anyag nyersanyag, így annak előállításáról nem kell dönteni.
  - {G,H,F}, mivel most az F anyagról döntöttünk, és korábban már döntés született a G és H anyagokról.
  - {(G,{O7}),(H,{O7}),(F,{O3,O4,O5})}, mivel most az F anyagról úgy döntöttünk, hogy az O3 és O4 műveleti egységek állítsák elő.

A továbbiakban a meghatározott 7 esetet és következményeit vizsgáljuk a rekurzió további menete során.

- Az X211-ből kiindulva csak a D anyagról kell dönteni. Az előállítására csak az O1 képes, így csak azt választhatjuk ki a D anyag előállítására. A struktúrát jelöljük X2111-el, (2.97-es) ábra. Továbbá vegyük észre, hogy megoldás struktúrát kaptunk, így ugorjunk vissza egy szintet a rekurzióban.
- Az X212 következik. Ebben az esetben a D és E anyagokról nem döntöttünk még.
  - Elsőként következzen a D anyagról történő döntés. A D anyagot mint korábba láttuk csak az O1 műveleti egység képes előállítani. A struktúrát jelöljük X2121-el, 2.93.ábra. Mivel csak az E anyagról nem született még döntés, mivel az O1 bemeneti anyaga nyersanyag, így az következik.
    * Az E anyagot csak az O2 műveleti egység képes előállítani. A struktúrát láthatjuk jelöljük X21211-el (2.94-es) ábra. Mivel O2 bemeneti anyagai nyersanyagok, így előállításukról nem kell dönteni. A p halmazunk újra üres lett, ezért megoldás struktúrát kaptunk. Lépjünk vissza a rekurzióban.

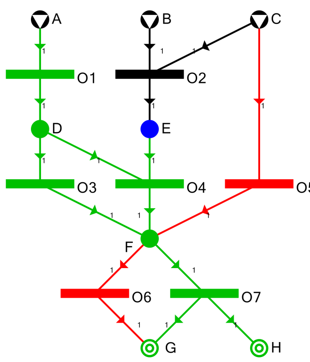


2.93. ábra. SSG példa: D anyagot az O1 állítja elő (X2121)

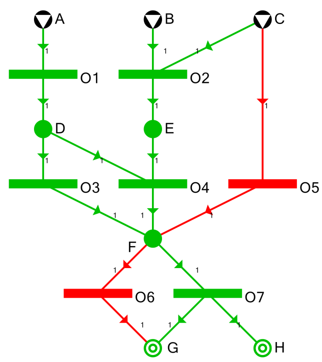


2.94. ábra. SSG példa: E anyagot az O2 állítja elő (X21211)

- Az X213 következik. Ebben az esetben korábban láthattuk, hogy megoldás struktúrát értünk el, ugyanis az F anyag előállítására kiválasztott O3 műveleti egység bemeneti anyagai nyersanyagok, így a p halmaz is üres.
- Az X214 következik. Ebben az esetben F anyag előállítására az O3 és az O4 műveleti egységet is kiválasztottuk. Valamint a D és az E anyagokról nem született még döntés. Ez az állás, hogy p={E,D} megegyezik X212-vel annyi különbséggel, hogy a D és E előállítására nem csak O4-et választottuk, ki hanem O4 és O3-at is. Az X212 analógiáján a rekurzió az X2141 és az X21411 fele megy tovább, melyben az X21411 lesz a következő megoldás struktúra. Ezt követően lépjünk vissza a rekurzióban. A lépések megtalálhatóak itt: 2.95-ös, 2.96-os ábra.



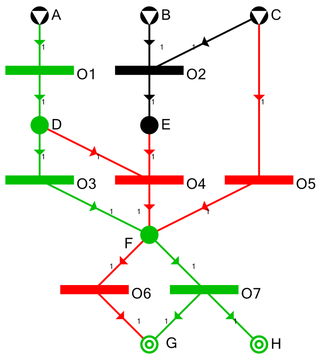
2.95. ábra. SSG példa: D anyagot az O1 állítja elő (X2141)



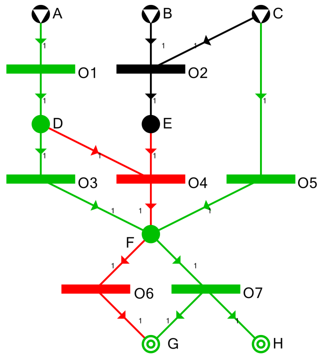
2.96. ábra. SSG példa: E anyagot az O2 állítja elő (X21411)

- Az X215 következik. Ebben az esetben F előállítására O3 és O5 műveleti egységek lettek kiválasztva. És a további döntéseket csak a D anyagról kell meghozni. Ez az eset hasonlóságot mutat az X211 esettel.

– A D anyagot csak az O1 képes előállítani, továbbá az O1 bemeneti anyaga nyersanyag, így egy megoldás struktúrát kapunk az X2151esetben (2.98-as ábra). Ezt követően lépjünk vissza a rekurzióban.

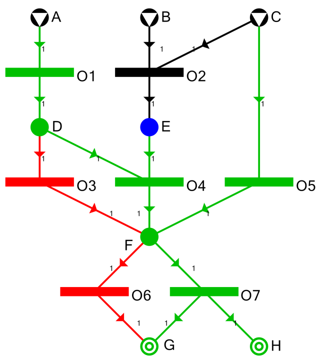


2.97. ábra. SSG példa: D anyagot az O1 állítja elő (X2111)

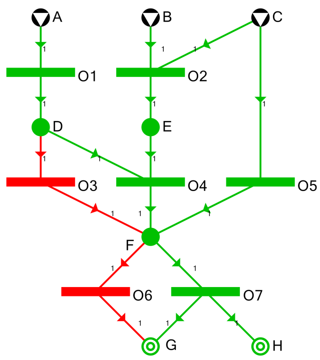


2.98. ábra. SSG példa: D anyagot az O1 állítja elő (X2151)

• Az X216 feldolgozása következik. Ekkor F anyag kiválasztására az O4 és az O5 műveleti egységeket választottuk ki, és a további döntéseket a D és E anyagokról kell hozni. Vegyük észre, hogy ez az eset is hasonlít az X212 esethez, annyiban különbözve tőle, hogy F anyag előállítására kiválasztottuk már korábban O5-öt is. Azonban ez a későbbi döntéseket nem befolyásolja. Így az X212 és az X214-hez hasonlóan először a D anyagról döntve eljutunk az X2161-hez (2.99-es ábra), majd az E anyagról döntve az X21611-hez (2.100-as ábra). Mivel itt nem maradt olyan anyag, amiről még nem döntöttünk így megoldás struktúrát kaptunk. Lépjünk vissza a rekurzióban.

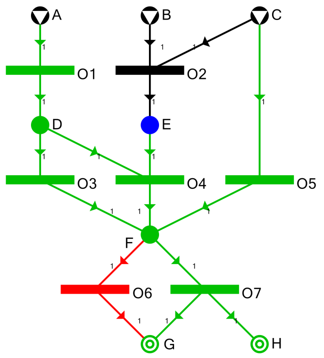


2.99. ábra. SSG példa: D anyagot az O1 állítja elő (X2161)

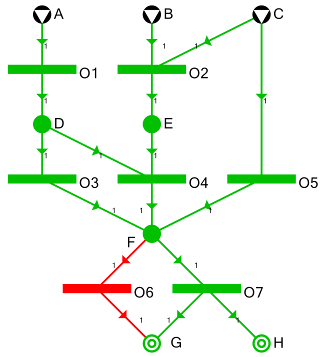


2.100. ábra. SSG példa: E anyagot az O2 állítja elő (X21611)

• Az X217 következik. Ebben az esetben F előállítására kiválasztottuk az O3, O4 és az O5 műveleti egységet is. Azonban a korábbi álláshoz hasonlóan most is csak a D és az E anyagok maradtak, melyekről döntést kell hozni. Ezt az esetet tárgyaltuk az előbb is. Hasonlóan ahhoz először a D anyagról döntve megkapjuk az X2171 (2.101-es ábra) struktúrát melyet l áthatunk az ábrán. Azt követően az E anyagról döntve kapjuk az X21711 (2.102-es ábra) struktúrát. Mivel megint elfogytak a p halmaz elemei így megoldás struktúrát kaptunk.



2.101. ábra. SSG példa: D anyagot az O1 állítja elő (X2171)



2.102. ábra. SSG példa: E anyagot az O2 állítja elő (X21711)

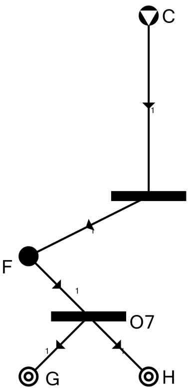
A rekurzióban a következő állapot az X3 állapot lesz. Mivel az X3 állapot annyiban különbözik az X2-től, hogy abban szerepel az O6-is a G anyag előállítására, így a többi rekurziós lépés megegyezik az X2 lépéseivel, csak a struktúrák annyiban különböznek, hogy tartalmazzák az O6 műveleti egységet. Az X3-tól kiinduló rekurziós lépések ábrákon ugyan nem kerültek reprezentálásra, de megegyeznek az X2-vel kezdődő azonosan végződő struktúrával, annyi különbséggel, hogy az X3-asok tartalmazzák az O6 műveleti egységet is, így ott az O6 zöldre lenne színezve. A rekurzió pontos menete az alábbiakban követhető fentről lefele, és balról jobbra olvasva.

- X1
  - X11 (inkonzisztens döntés)
- X2
  - X21
    - X211
      - X2111 (megoldás)
    - X212
      - X2121 → X21211 (megoldás)
    - X213 (megoldás)
    - X214
      - X2141 → X21411 (megoldás)
    - X215
      - X2151 (megoldás)
    - X216
      - X2161 → X21611 (megoldás)
    - X217
      - X2171 → X21711 (megoldás)
- X3
  - X31
    - X311
      - X3111 (megoldás)
    - X312
      - X3121 → X31211 (megoldás)

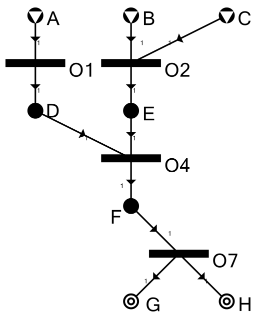
    * X313 (megoldás)
    * X314
        · X3141 → X31411 (megoldás)
    * X315
        · X3151 (megoldás)
    * X316
        · X3161 → X31611 (megoldás)
    * X317
        · X3171 → X31711 (megoldás)

A keresés során tizennégy darab kombinatorikusan lehetséges megoldás struktúrát azonosítottunk a rekurzív SSG algoritmus segítségével. Megemlítendő, hogy a generálás sorrendje a p halmazból történő anyag kiválasztástól, és a C hatványhalmaz bejárásától függ. A jelen esetben alkalmazott eljárás, mely elsőként hozza meg a döntéseket a végtermékekről annyiból előnyösebb, hogy nem végez felesleges lépéseket a rekurzióban mire kiderülne az inkonzisztencia. Azonban a sorrendek kiválasztása nem befolyásolja azt, hogy az algoritmus az összes megoldást generálja pontosan egyszer. A megtalált 14 darab megoldás megtalálható a 2.3.1-es alfejezetben.

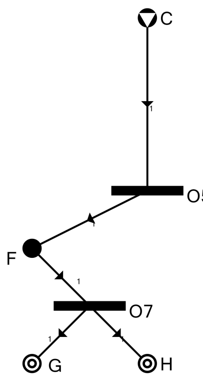
2.3.1. Kombinatorikusan lehetséges megoldásstruktúrák



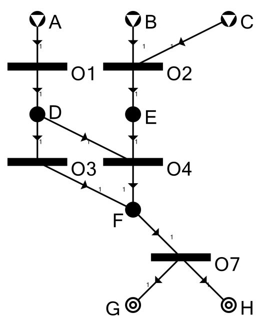
Sorszám: 1
Azonosító: X2111
Műveleti egységek:
$\{O1, O3, O7\}$



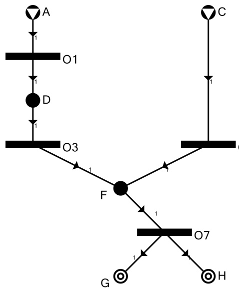
Sorszám: 2
Azonosító: X21211
Műveleti egységek:
$\{O1, O2, O4, O7\}$



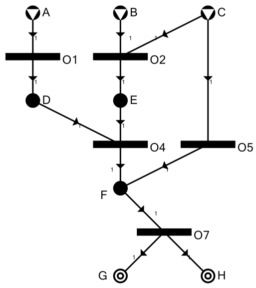
Sorszám: 3
Azonosító: X213
Műveleti egységek:
$\{O5, O7\}$



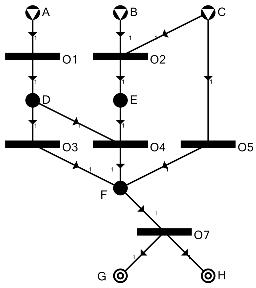
Sorszám: 4
Azonosító: X21411
Műveleti egységek:
$\{O1, O2, O3, O4, O7\}$



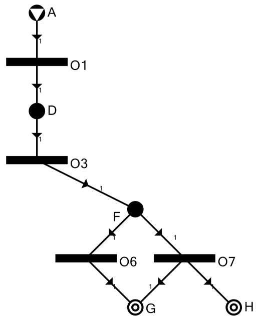
Sorszám: 5
Azonosító: X2151
Műveleti egységek:
$\{O1, O3, O5, O7\}$



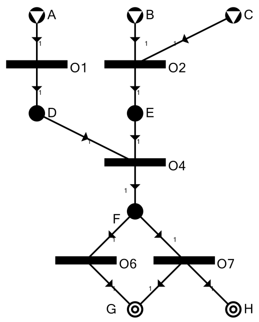
Sorszám: 6
Azonosító: X21611
Műveleti egységek:
$\{O1, O2, O4, O5, O7\}$



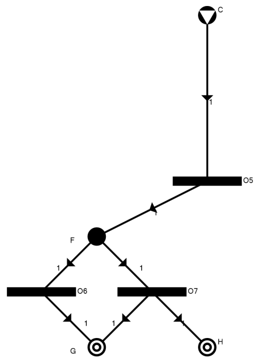
Sorszám: 7
Azonosító: X21711
Műveleti egységek:
$\{O1, O2, O3, O4,$
$O5, O7\}$



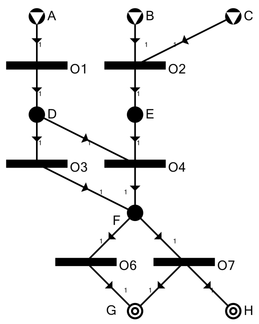
Sorszám: 8
Azonosító: X3111
Műveleti egységek:
$\{O1, O3, O6, O7\}$



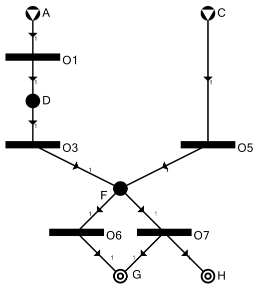
Sorszám: 9
Azonosító: X31211
Műveleti egységek:
$\{O1, O2, O4, O6, O7\}$



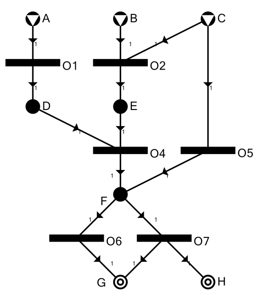
Sorszám: 10
Azonosító: X313
Műveleti egységek:
$\{O5, O6, O7\}$



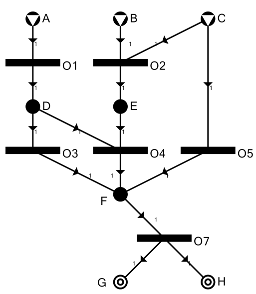
Sorszám: 11
Azonosító: X31411
Műveleti egységek:
$\{O1, O2, O3, O4,$
$O6, O7\}$



Sorszám: 12
Azonosító: X3151
Műveleti egységek:
$\{O1, O3, O5, O6, O7\}$



Sorszám: 13
Azonosító: X31611
Műveleti egységek:
$\{O1, O2, O4, O5, O6,$
$O7\}$



Sorszám: 14
Azonosító: X21711
Műveleti egységek:
$\{O1, O2, O3, O4, O5,$
$O6, O7\}$

3. PÉLDATÁR

Optimális folyamatok szintézise

3.1. Struktúra rajzolás

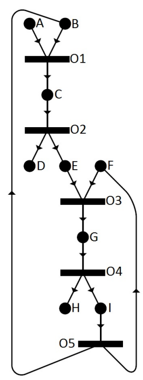
Feladat

Rajzolja fel az alábbi folyamatszintézis feladathoz tartozó P-gráfot! Határozza meg, hogy mely anyagok lehetnek potenciálisan termékek és nyersanyagok!

- $\mathcal{M} := \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$
- $\mathcal{O} := \Big\{\big(\{A, B\}, \{C\}\big), \big(\{C\}, \{D, E\}\big), \big(\{E, F\}, \{G\}\big), \big(\{G\}, \{H, I\}\big), \big(\{I\}, \{F, B\}\big)\Big\}$

Megoldás

A könnyebb érthetőség kedvéért a műveleti egységeket elnevezzük $O1, O2, \ldots, O5$-nek a feladatkiírásban felírt sorrend szerint, azaz $O1 = (\{A, B\}, \{C\})$, $O2 = (\{C\}, \{D, E\})$, és így tovább. A gráf felrajzolásánál a műveleti egységek az azonos anyagcsomópontok segítségével vannak összekötve. Például az $O1$ műveleti egység kimenetén lévő C anyag a bemeneti anyaga az $O2$ műveleti egységnek. A megfelelő struktúra A 3.1-es ábrán látható.



3.1. ábra. A 3.1-es példa struktúrája P-gráffal

Az ábrát megvizsgálva könnyen eldönthető, hogy mely anyagok lehetnek potenciálisan nyersanyagok. Az (S2) kombinatorikus axióma szerint egy anyag pontosan akkor nyersanyag, ha nem állítja egyetlen műveleti egység sem. Ez alapján egyedül az A anyag lehet nyersanyag. Ez természetesen csak akkor igaz, ha a 3.1-es ábra maximális struktúrát ábrázol. Ellenkező esetben egyedül azok az összes anyag lehet nyersanyag és az MSG algoritmus kiszűri majd azokat a műveleti egységeket, amelyek előállítják ezeket.

A potenciális termékek megállapításánál is induljunk ki az axiómákból és a 3.1-es ábrán látható struktúrából. Az (S1) axióma csak azt kötik ki, hogy minden terméknek szerepelnie kell a megoldásstruktúrában. Ez alapján bármelyik anyag lehetne termék. Viszont volt egy olyan kikötés, hogy a nyersanyagok és a termékek halmaza diszjunkt ($\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$). Ebből viszont következik, hogy az A anyag nem lehet termék, mivel azt nem állítjuk elő, így ő csak nyersanyag lehet.

3.2. Megoldásstruktúrák generálása

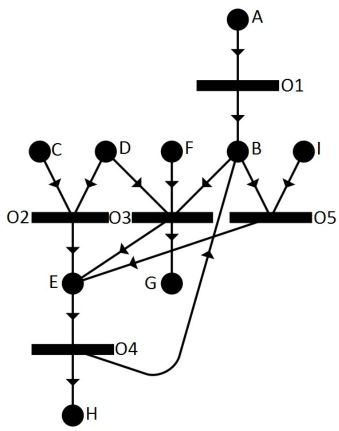
Feladat

Rajzolja fel az alábbi PNS feladathoz tartozó P-gráfot! Határozza meg a maximális struktúrát és a kombinatorikusan lehetséges megoldásstruktúrákat!

- $\mathcal{M} := \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$
- $\mathcal{O} := \Big\{ \big(\{A\}, \{B\}\big), \big(\{C, D\}, \{E\}\big), \big(\{D, F, B\}, \{E, G\}\big), \big(\{E\}, \{H, B\}\big), \big(\{B, I\}, \{E\}\big) \Big\}$

Megoldás

A feladathoz tartozó gyártási struktúra P-gráfját az előző feladathoz hasonlóan fel lehet rajzolni (3.2-es ábra). A feladat második része a maximális struktúra és a megoldásstruktúrák generálása nem végezhető el, mivel a feladat definíciójában nincsenek megadva a nyersanyagok és a termékek halmazai.



3.2. ábra. A 3.2-es feladat struktúrája P-gráffal

3.3. Maximális struktúra generálása

Feladat

Az axiómák segítségével határozza meg az adott folyamatszintézis feladathoz tartozó maximális struktúrát!

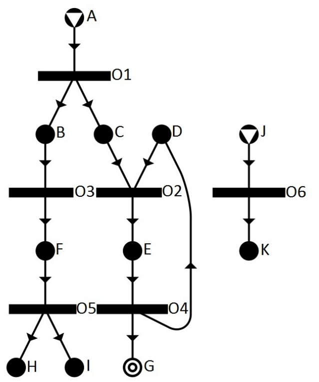
- $\mathcal{M} := \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$
- $\mathcal{R} := \{A, J\}$
- $\mathcal{P} := \{G\}$
- $\mathcal{O} := \{(\{A\}, \{B, C\}), (\{D, C\}, \{E\}), (\{B\}, \{F\}), (\{E\}, \{G, D\}), (\{F\}, \{H, I\}), (\{J\}, \{K\})\}$

Megoldás

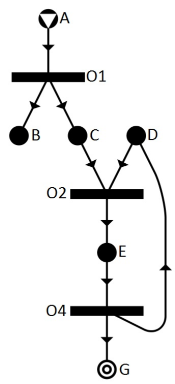
Első körben szintén a struktúra P-gráfjának felrajzolásával kezdünk, ami a 3.3-as ábrán látható. Ebből a kezdeti struktúrából indulva határozzuk meg a maximális struktúrát.

Az MSG algoritmus első része a redukciós lépés, ahol először eltávolítjuk azokat a műveleti egységeket, amelyek nyersanyagokat állítanak elő. Ilyen műveleti egység nem szerepel a struktúrában. Ezek után iteratívan eltávolítjuk azokat a műveleti egységeket, amelyek bemenetén olyan anyaga van, amelyet nem állítunk elő, de nem nyersanyagok. Ilyen anyag és hozz kapcsolódó műveleti egység nem szerepel a struktúrában. A redukciós lépés után elmondhatjuk, hogy a struktúra nem változott.

Az MSG algoritmus második részében (a kompozíciós lépésben) elindulunk a termékektől a nyersanyagokig és kiválasztjuk azokat a műveleti egységeket, amelyeket ezekből el lehet érni az irányított éleken visszafelé menve. Egyetlen termék van, a G anyag. A G anyagot az $O4$ műveleti egység gyártja, amelynek E anyaga a bemenete. Az E anyagot az $O2$ műveleti egység gyártja, amelynek C és D anyag a bemenete. A D anyagot az $O4$ műveleti egység gyártja, amelyet már elértünk más úton is. A C anyagot pedig az $O1$ műveleti egység gyártja, amelynek egy nyersanyag (A) az egyetlen bemenete. Ezek alapján elmondhatjuk hogy az $O1$, $O2$, és $O4$ műveleti egység és a hozzájuk tartozó anyagok alkotják a feladat maximális struktúráját. A maximális struktúra P-gráfja a 3.4-es ábrán látható.



3.3. ábra. A 3.3-as feladat struktúrája P-gráffal



3.4. ábra. A 3.3-as feladat maximális struktúrája

3.4. Almás palacsinta

Feladat

Vacsorával akarjuk meglepni barátainkat, döntésünk az egyszerűen elkészíthető almás palacsintára esett. Határozza meg a vacsora készítésének a folyamatát és rajzolja fel a hozzá tartozó P-gráfot, ha a recept az alábbiakban adott!

Két tojást, egy liter tejet és 80 dkg lisztet egy keverőtálban csomómentesen elkeverünk. Ha nincs otthon tej, akkor 1,2 liter vizet használunk folyadéknak. A masszához hozzáadunk egy csipet sót, egy csipet cukrot és fél deci olajat majd alaposan elkeverjük. Három almát megpucolunk, lereszeljük és az olajos masszába keverjük. Palacsintasütőben kisütjük a palacsintákat, a recept alapján 35 palacsinta készül. A palacsinták megtöltéséhez háromféle tölteléket használhatunk, kakaót, lekvárt és mogyorókrémet. Az elkészült palacsintákat boltban vásárolt tejszínhabbal tálaljuk. Egy személyre 6 darab palacsintát tervezünk.

Megoldás

A struktúra felrajzolásához azonosítsuk be a műveleteket és a hozzájuk tartozó anyagokat.

- Első lépésként anyagok összekeverését kell elvégeznünk, amit jelöljünk a továbbiakban $keveres1$-nek. Ennek a keverésnek a bemenő anyagai a tojás, a liszt és a tej vagy a víz, a kimenő anyaga pedig a palacsintamassza, amit nevezzünk röviden $massza$-nak. Azt hogy egy műveleti egységnek hogyan lehet tej és víz is bementi anyaga, később visszatérünk, de előbb tekintsük végig a teljes folyamatot.

- Második lépés szintén egy keverés lesz négy bemenő anyaggal, olajjal, sóval, cukorral és az előző lépésben előállított masszával. A műveleti egységet a továbbiakban nevezzük $keveres2$-nek, a kimeneti anyagát pedig $olajos\_massza$-nak.
- Szintén fontos lépés a három alma lereszelése, amelyet jelölő műveleti egységet nevezzük $reszeles$-nek, az eredményét pedig $reszelt\_alma$-nak. A bementi anyag természetesen az alma.
- A $reszelt\_alma$-t és az $olajos\_massza$-t össze kell keverni, amely lépés a $keveres3$ nevet kapja és amelynek eredménye az $almas\_massza$ lesz.
- A kész masszát meg kell sütni, amit egy új $palacsinta\_sutes$ műveleti egység jelöl. A kimeneti anyag a sokatmondó $palacsinta$ nevet kapja.
- A kisült palacsintákat meg kell tölteni, három különböző töltelékkel. Minden lehetséges töltéshez egy külön műveleti egység tartozik, név szerint a $kakao\_toltes$, a $krem\_toltes$ és a $lekvar\_toltes$. Minden műveleti egység bemenete két anyag, az egyik a palacsinta, a másik pedig az aktuális töltelék. A kimeneti anyag meghatározásánál két választásunk van. Vagy megkülönböztetjük a három fajta palacsintát ($kakaos$, $mogyorokremes$, $lekvaros$) vagy egy $toltott\_palacsinta$ nevű anyagot vezetünk be, amely egy közös kimenete mind a három műveletnek. Mi most a második megoldást választjuk.
- Az utolsó végrehajtandó művelet a vacsora tálalása, amelyhez a $talalas$ nevű műveleti egység tartozik. A $toltott\_palacsinta$-n kívül szükség van hozzá még tejszínhabra bementi anyagként. A műveleti egység kimenete a $vacsora$ lesz egy személyre.
- Végezetül nézzük meg, hogy az első keveréshez hogyan tudjuk azt biztosítani, hogy választani lehessen a víz és a tej között. Egy műveleti egységnek az összes bemenetére szükség van ahhoz, hogy működjön, azaz nem vehetjük fel mind a két anyagot, mind az egység bemenetét. Ehelyett a $keveres1$ műveleti egység egyik bemenete egy $folyadek$ nevű anyag lesz, amit összekötünk a víz és tej anyagcsomópontokkal. Mivel közvetlenül nem lehet összekötni két anyagot, ezért műveleti egységre (egységekre) van szüksége ehhez. Ha csak egy műveleti egységet használnák, akkor ugyanaz a probléma fellépne, mint a $keveres1$ műveleti egységnél, ezért két műveleti egységet használunk. Az egyik műveleti egység neve van_tej a másiké pedig $nincs\_tej$ lesz. Ha a van_tej műveleti egységet vesszük be a struktúrába, akkor tejből készül a palacsinta, ha a $nincs\_tej$ műveleti egységet, akkor vízből. Strukturális szempontból az is elfogadható, hogy tej és víz keverékkel készüljön el a palacsinta, bár ezt a recept nem tartalmazza.

Ezek után összefoglalhatjuk, hogy a műveleti egység halmaz a következő lesz: $\mathcal{O} = \{keveres1$, $keveres2$, $keveres3$, $reszeles$, $palacsinta\_sutes$, $kakao\_toltes$, $krem\_toltes$, $lekvar\_toltes$, $talalas$, van_tej, $nincs\_tej\}$, Az anyaghalmaz pedig $\mathcal{M}$ = {tej, viz, $folyadek$, $tojas$, $liszt$, $olaj$, so, $cukor$, $alma$, $reszelt\_alma$, $massza$, $olajos\_massza$, $almas\_massza$, $palacsinata$, $kakao$, $mogyorokrem$, $lekvar$, $toltott\_palacsinta$, $tejszinhab$, $vacsora$}. A „termék” amit elő akarunk állítani a vacsora, azaz $\mathcal{P}$ ={$vacsora$}, valamint a nyersanyagok azok, amiket nem állítunk elő, de rendelkezésre állnak, azaz $\mathcal{R}$ = {tej, viz, $tojas$, $liszt$, $olaj$, so, $cukor$, $alma$, $kakao$, $mogyorokrem$, $lekvar$, $tejszinhab\}$.

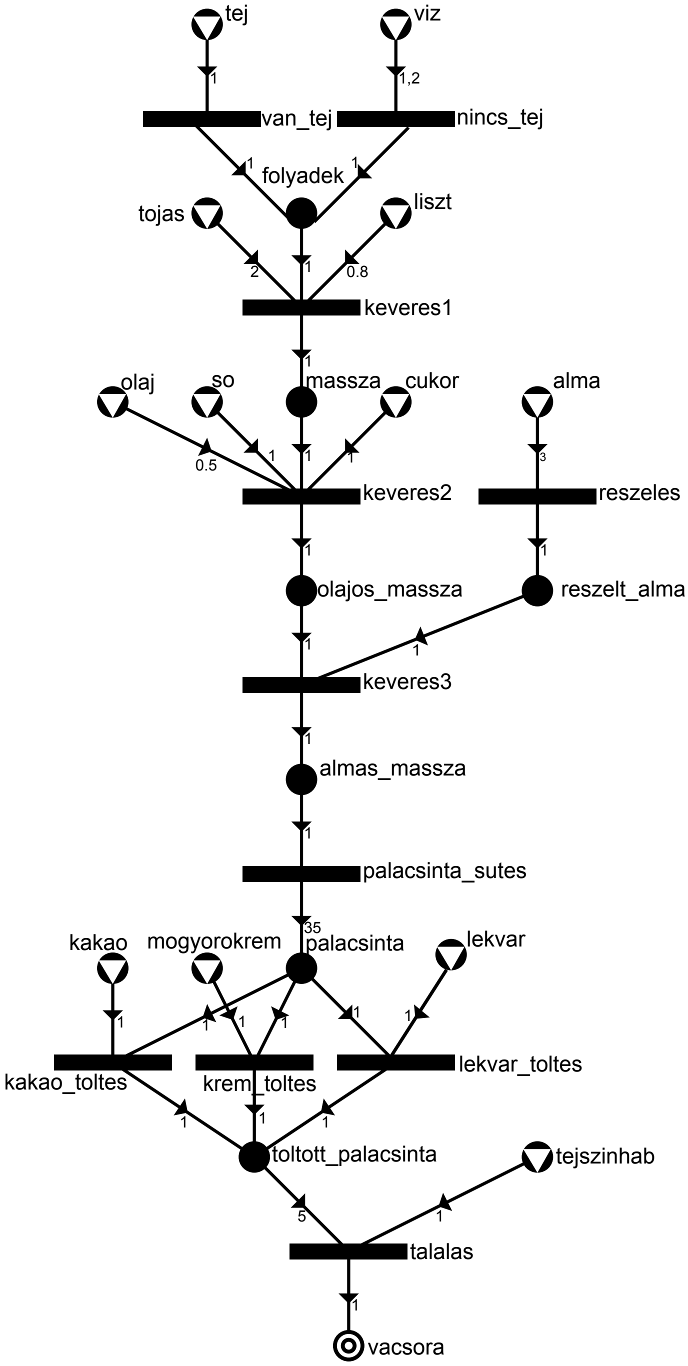
A műveleti egységek ki- és bemeneti anyagmennyiségnek meghatározásához szükség van még az anyagarányok megadásához. Ezek felírásához a receptet kell értelmezni műveleti egységenként.

- A $keveres1$ műveleti egység 2 tojásból, 1 (vagy 1,2) liter folyadékból és 80 dkg lisztből készíti masszát. Értelemszerűen választjuk meg a különböző anyagokhoz az egységeket. A $tojas$-ból 1 darab az egység, azaz 2 egységnyi $tojas$-ra van szükség. $folyadek$-ból nem definiáljuk az alapegységet, mivel van olyan, amikor 1 liter és van olyan, amikor 1,2 liter kell belőle. Ehelyett azt mondjuk, hogy 1 egységnyi $folyadek$ kell és a $folyadek$-ot előállító műveleti egységeknél biztosítjuk a szükséges anyagmennyiséget. A $liszt$-ből 1 kg az egység, azaz 0.8 egységnyi kell. A $massza$ nem mérhető sem darabban sem literben sem kilóban, ezért azt mondjuk, hogy az egységnyi méretű $keveres1$ műveleti egység 1 adagnyi $massza$-t állít elő, azaz 1 egységnyit.
- A $keveres2$ műveleti egység az előző lépésben elkészült masszához kever 0,5 dl olajat, 1 csipet sót és cukrot. Az $olaj$ egységnyi mérete 1 dl, a so-é és a $cukor$-é az egy csipet, azaz ezekből

rendre 0,5, 1 és 1 egységnyi szükséges. A bementi $massza$ és a kimeneti $olajos\_massza$ mennyisége szintén egységnyinek tekinthető.

- A $reszeles$ műveleti egység 3 almából készít reszelt almát. Az $alma$-ból értelemszerűen 1 darab az egység, azaz 3 egységnyi $alma$ szükséges. A 3 darab $alma$-ból készült $reszelt\_alma$ mennyiséget a $massza$-hoz hasonlóan egységnyinek tekintjük.
- A $keveres3$ műveleti egység végrehajtása során összekeveredik az olajos massza a reszelt almával. Itt mind a három anyag ($olajos\_massza$, $reszelt\_alma$, $almas\_massza$) mennyiségét egységnyinek tekintjük.
- A $palacsinta\_sutes$ művelet során az almás masszából 35 darab palacsintát sütünk. Az $almas\_massza$ mennyisége a korábbiakhoz hasonlóan egységnyi. A $palacsinta$-ból természetes 1 darabot tekintünk egységnek, így 35 egységnyi készül a sütés során.
- A receptben a következő művelet a palacsinták megtöltése, amit három külön műveletnek tekintettünk ($kakao\_toltes$, $krem\_toltes$, $lekvar\_toltes$). Az „egységnyi méretű” töltés művelete 1 darab $palacsinta$-t tölt meg töltelékkel, azaz a $palacsinta$ bemeneti anyagaránya 1. Mind a három töltelék ($kakao$, $mogyorokrem$, $lekvar$) esetén az 1 darab $palacsinta$-hoz szükséges mennyiséget tekintjük egységnyinek. Az egységnyi műveleti egység kimenete egy darab $toltott\_palacsinta$.
- A $talalas$ során a töltött palacsintákat tejszínhabbal tálaljuk. Mivel egy személyre 5 palacsintát tervezünk, ezért a $toltott\_palacsinta$ bemeneti anyagaránya 5 lesz, ha 1 egységnyi (1 személynek) $vacsora$-t készítünk. Egy egységnyi $tejszinhab$ 1 egységnyi $vacsora$-hoz elegendő.
- A van_tej segéd műveleti egység 1 egységnyi (liter) tej-ből 1 egységnyi $folyadek$-ot állít elő.
- A $nincs\_tej$ segéd műveleti egység használata esetén biztosítani kell azt, hogy nem 1 liter, hanem 1,2 liter vízre van szükség. Ezt úgy lehet megoldani, hogy a műveleti egység bemenetén nem 1 egységnyi (1 liter), hanem 1,2 egységnyi (1,2 liter) víz kell ahhoz, hogy 1 egységnyi $folyadek$ keletkezzen.

Ezek alapján fel lehet rajzolni az almás palacsinta elkészítésének folyamatát ábrázoló P-gráfot, amely a 3.5-ös ábrán látható.



3.5. ábra. A 3.4-es feladat maximális struktúrája

3.5. Borászat

Feladat

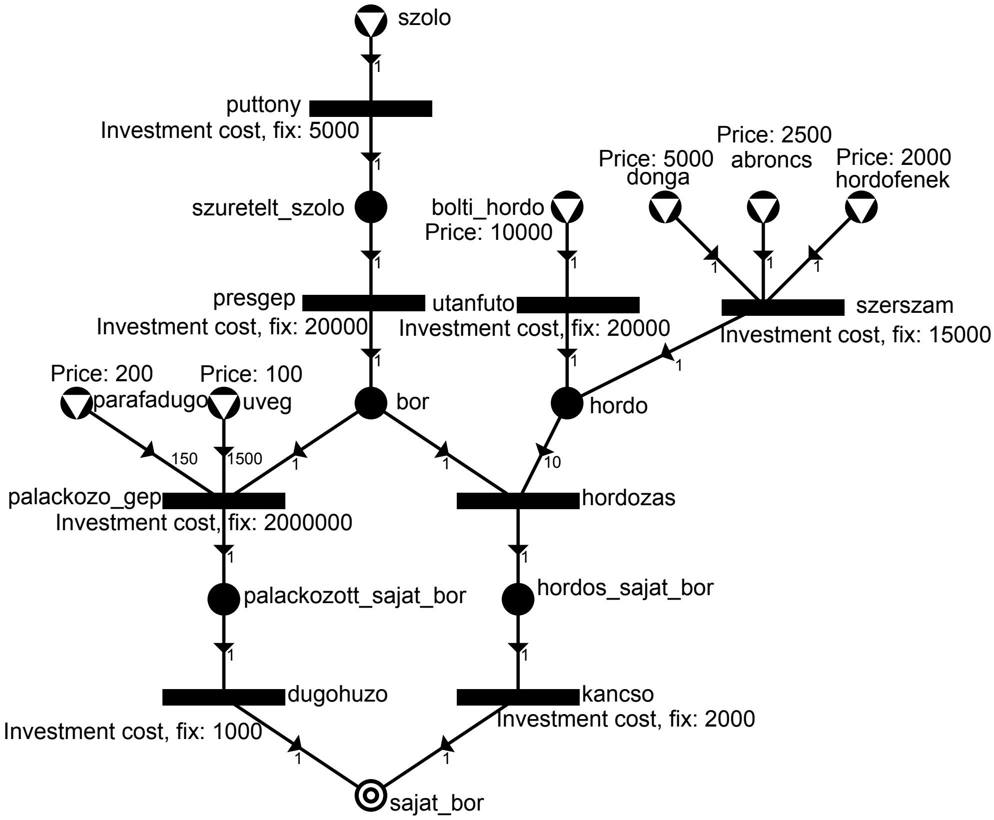
Szeretnénk saját borunkat kortyolgatni, így egy borászat megalapításába vágjuk fejszénket. A célt két módon érhetjük el: felhozunk a pincéből egy üveg palackozott saját bort, vagy lemegyünk egy kancsóval és a hordót csapoljuk meg. Első esetben szükségünk van egy dugóhúzóra, ennek ára 1.000 Ft, második esetben pedig egy kancsóra, ennek ára 2.000 Ft. Ahhoz, hogy palackozott borunk lehessen, szükség van parafa dugóra, üvegre és nyilván borra. Ezt a munkát azonban nincs időnk nekünk elvégezni, így be kell fektetni egy palackozó gépbe, aminek ára 2.000.000 Ft. Üveg, parafadugó vásárolható a boltban. Egy üveg 100 Ft-ba, tíz parafadugó pedig 200 Ft-ba kerül. Ha nem palackban, hanem hordóban szeretnénk tárolni a bort, akkor nem kell semmilyen gépet megvásárolnunk azonban ehhez szükségünk van a bor mellett 10 darab hordóra. A hordókat vagy előállítjuk vagy megvesszük boltban 10.000 Ft-ért darabját. Ha boltban vesszük meg, akkor azok elszállításához szükségünk lesz egy utánfutóra, ennek ára 20.000 Ft. Ha otthon kívánjuk előállítani a hordót dongából, abroncsból és hordófenékből, akkor a szükséges szerszámok beszerzése 15.000 Ft-ba kerül. Egy hordó előállításához a donga 5.000 Ft-ba, az abroncs 2.500 Ft-ba, a hordófenék pedig 2.000 Ft-ba kerül. A bort nyilván szüretelt szőlőből készítjük el, ehhez présgép kell, melynek ára 20.000 Ft. A szüreteléshez pedig puttony kell, melynek ára 5.000 Ft. A szőlő nyersanyagként ingyenesen elérhető a hegyünkön. Feltételezzük, hogy a bor vagy 10 hordóba vagy 1500 üvegbe fér bele.

Határozzuk meg a bor előállításának (maximális) struktúráját, valamint vizsgáljuk meg, hogy hány fajta módon tudunk belevágni a vállalkozásba. Ezek után adjuk meg, hogy a vállalkozás beindításának melyik módja rendelkezik a legkisebb költséggel, ha a következő évben már a nyersanyagokat is be kell szerezni.

Megoldás

A megoldást természetesen a folyamat struktúrájának meghatározásával kell kezdeni. Az előző példához hasonlóan menjünk végig egyesével az elvégzendő műveleteken (műveleti egységeken), de most rögtön határozzuk is meg a ki és bemeneti anyagok anyagáram arányait és az egyéb paramétereket. Induljunk ki abból, hogy $sajat\_bor$-t szeretnénk az asztalunkon látni. Értelemszerűen a $sajat\_bor$ lesz a termék a struktúránkban, azaz $\mathcal{P} = \{sajat\_bor\}$.

- A $sajat\_bor$-t előállíthatjuk úgy, hogy egy $dugohuzo$ nevű műveleti egység segítségével kinyitunk egy üveg $palackozott\_sajat\_bor$-t. Természetesen mivel 1 adag $sajat\_bor$-t készítünk 1 $palackozott\_sajat\_bor$-ból, ezért az anyagarány mindenhol 1 lesz. Mivel feltételezzük, hogy nincs dugóhúzónk, ezért a műveleti egységhez tartozik egy 1.000 Ft-os befektetési költség.
- A $sajat\_bor$ másik előállítási módja az, ha hordóból vesszük ki a bort, azaz $hordos\_sajat\_bor$-ból készítjük el. Ehhez szükség van egy $kancso$ műveleti egységre, ahol az anyagarány mindenhol 1. Mivel $kancso$ sem áll rendelkezésünkre, ezért ennek a műveleti egységnek is van befektetési költsége, konkrétan 2.000 Ft.
- A $palackozott\_sajat\_bor$ elkészítésének szükségünk van $palackozo\_gep$-re. A műveleti egység az összes $palackozott\_sajat\_bor$-t el tudja készíteni, így a kimeneti anyagarány 1. A műveleti egység bemeneti anyagai a bor, a $parafadugo$ és az $uveg$. Mivel az összes bor-t fel tudjuk dolgozni ezért itt az anyagarány 1. Az összes bor palackozásához a feladat leírása szerint 1500 üvegre van szükség, azaz az $uveg$ bemenet aránya 1500 lesz. Minden üveghez egy parafadugóra is szükség van, de mivel a parafadugó 10-esével lehet vásárolni, így ennek a bemeneti aránya 150. A palackozó gép megvásárlása 2.000.000 Ft-ba kerül, ezért ekkora befektetési költség tartozik a műveleti egységhez. Az $uveg$ és a $parafadugo$ megvásárolható (alapanyag), és az egységi áruk rendre 200 és 100 Ft, ezért az anyagcsomópontokhoz ezek az értékek hozzárendelésre kerülnek.
- A $hordos\_sajat\_bor$ előállításához a bor-t $hordo$-kba kell tölteni, amely műveletet a továbbiakban $hordozas$-nak nevezünk. Ehhez a művelethez nincs szükség műveleti egység megvásárlására, ezért nem tartozik hozzá befektetési költség. A bor és a $hordos\_sajat\_bor$ anyagáram



3.6. ábra. A 3.5-ös feladat folyamatának struktúrája

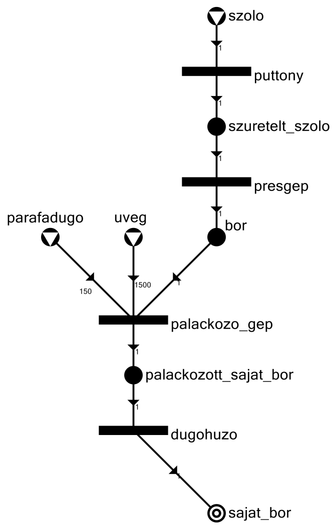
aránya az előző műveleti egységhez hasonlóan 1 lesz. Mivel az összes bor tárolásához 10 hordóra van szükség, ezért a $hordo$ bemenet aránya 10.

- A $hordo$-t meg lehet vásárolni boltban ($bolti\_hordo$), viszont ekkor egy $utanfuto$-val kell hazaszállítani. Az $utanfuto$-hoz tartozik egy 20.000 Ft-os befektetési költség, valamint a $bolti\_hordo$ ára darabonként 10.000 Ft.
- A $hordo$-t elő is lehet állítani $szerszam$ segítségével $donga$-ból, $abroncs$-ból és $hordofenek$-ből. A $szerszam$ befektetési költsége 15.000 Ft, Az egy hordóhoz való egységnyi $donga$ 5.000, az $abroncs$ 2.500 és a $hordofenek$ 2.000 Ft-ba kerül.
- A bor-t egy $presgep$ műveleti egység állítja elő $szuretelt\_szolo$-ből. A $presgep$-hez tartozó befektetési költség 20.000 Ft.
- A $szuretelt\_szolo$-t egy $puttony$ használatával $szolo$-ből állítják elő (szüretelik le), amely $puttony$ befektetési költsége 5.000 Ft. A $szolo$ bár nyersanyag, nincs költsége.

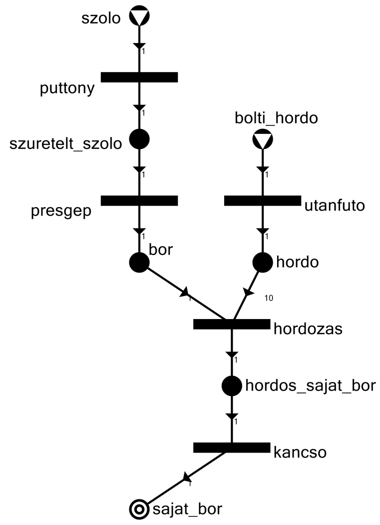
A struktúra (amely a 3.6-os ábrán látható) ezek után a következő halmazokkal írható le.

- $\mathcal{P} = \{sajat\_bor\}$
- $\mathcal{R} = \{parafadugo, uveg, bolti\_hordo, donga, abroncs, hordofenek, szolo\}$
- $\mathcal{R} = \{sajat\_bor, palackozott\_sajat\_bor, hordos\_sajat\_bor, parafadugo, uveg, bor, szuretelt\_szolo, szolo, hordo, bolti\_hordo, donga, abroncs, hordofenek\}$

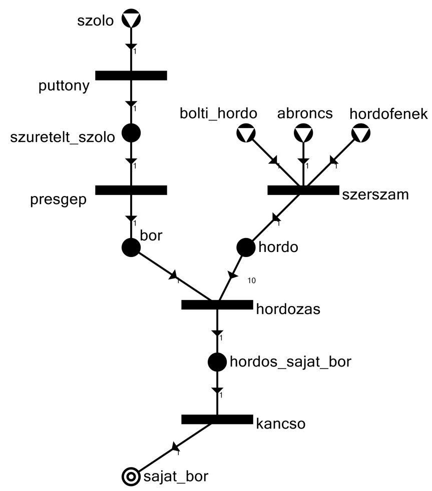
A felrajzolt struktúra egyben maximális struktúra is, mivel teljesülnek rá a kombinatorikus axiómák. A példára az SSG algoritmust futtatva azt láthatjuk, hogy összesen hét kombinatorikusan lehetséges megoldásstruktúra tartozik a feladathoz. A megoldásstruktúrák a 3.7-es ábrán láthatóak. Az ábrákon nem tüntettük fel a költségeket, a csomópontok nevein kívül csak az anyagarányok szerepelnek az ábrán. Gyakorlatilag két döntésünk lehetséges. Az egyik azt mutatja meg, hogy üveges bort készítünk, hordósat vagy mind a két fajtát. A másik döntésnél a hordókról kell dönteni, hogy megvesszük őket, előállítjuk őket, vagy mind a kettőt egyszerre megtesszük. Így alakul ki a hét kombinatorikusan lehetséges megoldásstruktúra.


szolo
puttony
szuretelt_szolo
presgep
parafadugo
uveg
bor
palackozo_gep
palackozott_sajat_bor
dugohuzo
sajat_bor

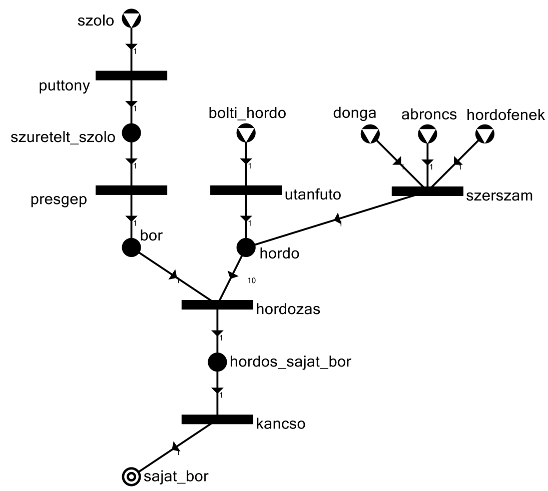
(a)


szolo
puttony
szuretelt_szolo
bolti_hordo
presgep
utanfuto
bor
hordo
hordozas
hordos_sajat_bor
kancso
sajat_bor

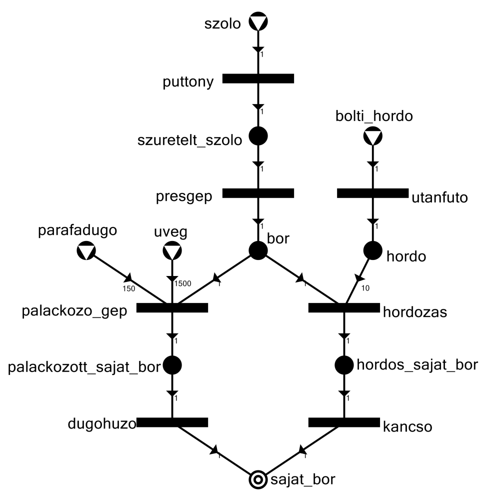
(b)


szolo
puttony
szuretelt_szolo
bolti_hordo
abroncs
hordofenek
presgep
szerszam
bor
hordo
hordozas
hordos_sajat_bor
kancso
sajat_bor

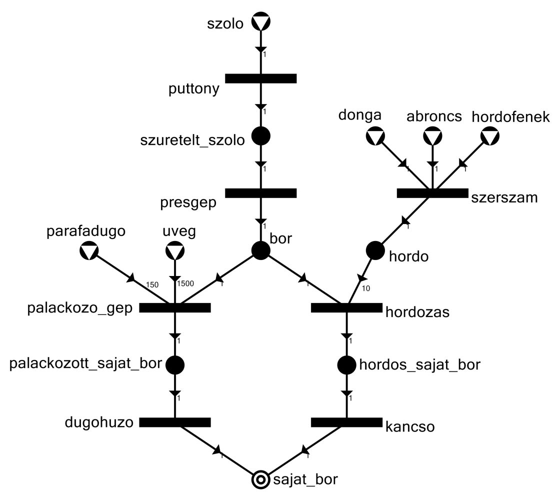
(c)


szolo
puttony
szuretelt_szolo
bolti_hordo
donga
abroncs
hordofenek
presgep
utanfuto
szerszam
bor
hordo
hordozas
hordos_sajat_bor
kancso
sajat_bor

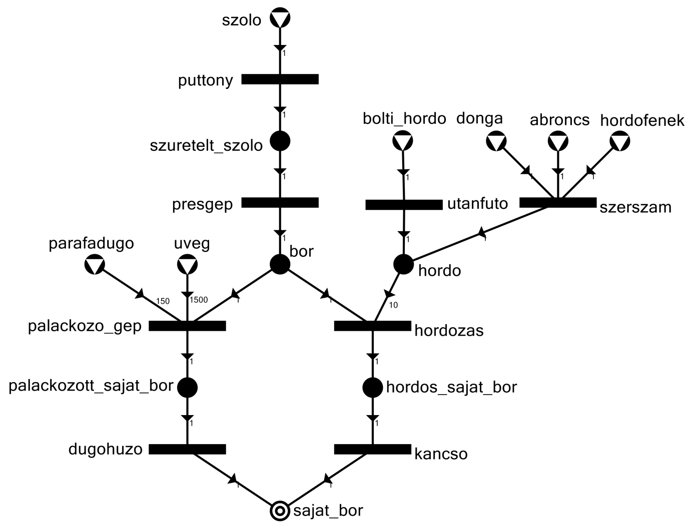
(d)


szolo
puttony
szuretelt_szolo
bolti_hordo
presgep
utanfuto
parafadugo
uveg
bor
hordo
palackozo_gep
hordozas
palackozott_sajat_bor
hordos_sajat_bor
dugohuzo
kancso
sajat_bor

(e)


szolo
puttony
szuretelt_szolo
donga
abroncs
hordofenek
presgep
szerszam
parafadugo
uveg
bor
hordo
palackozo_gep
hordozas
palackozott_sajat_bor
hordos_sajat_bor
dugohuzo
kancso
sajat_bor

(f)



(g)

3.7. ábra. A 3.5-ös feladat megoldásstruktúrái

A legjobb struktúra kiválasztása két fajta módon történhet meg. Vagy mindegyik megoldásstruktúrára felírjuk a megfelelő LP modellt és egyesével megoldjuk őket, vagy az ABB algoritmust használva megkapjuk az optimális megoldást. A PNS Studio segítségével mind a két esetben ugyanazt a három megoldást kapjuk, azaz a 3.7(c) ábrán látható megoldásstruktúra az optimális, ahol hordós bort készítünk és a hordót magunk állítjuk elő, amelynek befektetési és nyersanyag költsége 99.200 Ft. A második legjobb megoldás a 3.7(e) ábra struktúrája, ahol hordós bort készítünk de vásároljuk a hordókat, itt a költség 104.700 Ft. A harmadik megoldás a 3.7(a) megoldásstruktúra, ahol üveges bort készítünk 3.826.000 Ft-os költséggel. Az összes többi megoldásstruktúra esetén ugyanezeket az értékeket kapjuk vissza, azaz például a 3.7(d) esetben amikor előállítunk és vásárolunk is hordót, akkor az LP modell megoldásában a vásárlás „kapacitása” 0, azaz valójában nem vásárolunk semmit és ez nem növeli meg a költségeket. Az ilyen jellegű megoldások akkor fordulnak elő, amikor a műveleti egységeknek nincs fix költsége, valamint ha nincsenek nyersanyag- és a kapacitáskorlátok, mint az nálunk most előfordult.

3.6. PC forgalmazás

Feladat

Számítógépeket forgalmazó céget vezetünk. A cégünk két helyről egy veszprémi és egy székesfehérvári raktárból tud számítógépet vásárolni. Veszprémben egy számítógép 225 euróba, Székesfehérváron pedig 235 euróba kerül. A veszprémi raktárban 200 darab számítógép van, a székesfehérváriban 400. Ezen kívül van a cégünknek Fehérváron egy összeszerelő üzeme, ahol számítógépek összeszereléséhez rendelkezésünkre áll 800 darab számítógép ház darabja 50 euróért továbbá 900 darab elektronika darabja 85 euróért. Egy számítógép összeszereléséhez egy számítógép házra és két elektronikára van szükség. Ha össze akarunk szerelni egy számítógépet, akkor a szerelő sor beindítása 20 euróba kerül valamint a gépek összeszerelése darabonként 18 euróba.

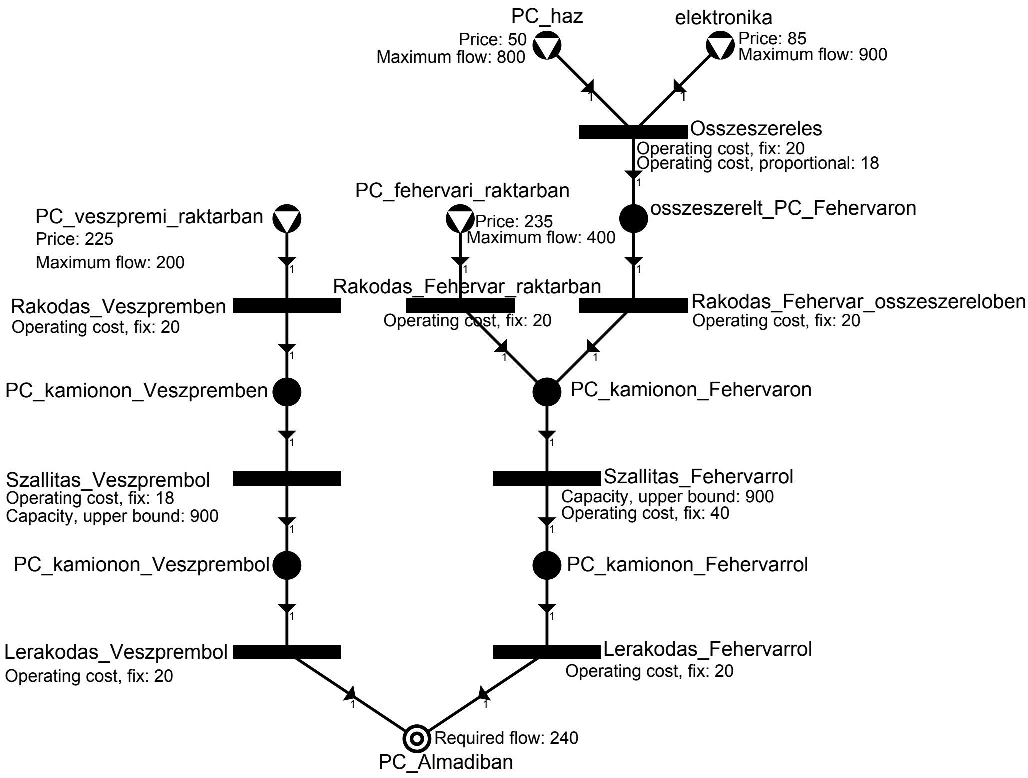
Kaptunk egy megrendelést Balatonalmádiból 240 számítógépre, amit a lehető legolcsóbban akarunk kielégítenünk. A számítógépeket kamionnal tudjuk elszállítani Balatonalmádiba, egy kamionba legfeljebb 900 számítógép fér. A kamionok felpakolása a számítógépek számától függetlenül 20 euróba kerül. A szállítás költsége Balatonalmádiba Veszprémből 18 euró, Fehérvárról pedig 40 euró. Egy kamion lerakodásának költsége 20 euró.

Határozzuk meg a szállítási folyamat struktúráját és oldjuk meg a feladatot PNS Studio segítségével az ABB algoritmussal.

Megoldás

A megoldás folyamatát most nem a műveleti egységeken keresztül mutatjuk be, hanem a feladatban leírását mondatonként megvizsgáljuk és bevezetjük a szükséges műveleti egységeket, anyagokat, vagy paramétereket rendelünk már meglévő objektumainkhoz.

- „A cégünk két helyről egy veszprémi és egy székesfehérvári raktárból tud számítógépet vásárolni.” Ez azt jelenti, hogy lesz két nyersanyag csomópontunk a struktúrában. Az egyik neve $PC\_veszpremi\_raktarban$, a másik pedig $PC\_fehervari\_ratarban$ lesz.
- „Veszprémben egy számítógép 225 euróba, Székesfehérváron pedig 235 euróba kerül.” Azaz a $PC\_veszpremi\_raktarban$ anyag egységnyi nyersanyag költsége 225, a $PC\_fehervari\_raktarban$ anyagé pedig 225.
- „A veszprémi raktárban 200 darab számítógép van, a székesfehérváriban 400.” A $PC\_veszpremi\_raktarban$ nyersanyagból legfeljebb 200 áll rendelkezésre, a $PC\_fehervari\_raktarban$ anyagból pedig 400.
- „Ezen kívül van a cégünknek Fehérváron egy összeszerelő üzeme, ahol számítógépek összeszereléséhez rendelkezésünkre áll 800 darab számítógép ház darabja 50 euróért továbbá 900 darab elektronika darabja 85 euróért.” Azaz lesz egy műveleti egységünk, amit nevezzünk $Osszeszereles$-nek, és lesz két új nyersanyagunk, a PC_haz és az $elektronika$, amelyek nyersanyag költsége 50 és 85 lesz, a rendelkezésre álló mennyiség pedig 800 és 900.
- „Egy számítógép összeszereléséhez egy számítógép házra és két elektronikára van szükség.” Az $Osszeszereles$ műveleti egységnek két bemeneti anyaga lesz, az PC_haz és az $elektronika$, valamint egy kimeneti anyaga, amit nevezzünk $osszeszerelt\_PC\_Fehervaron$-nak. Az $elektronika$ bemenet anyagaránya 2, a többi anyagé 1 lesz.
- „Ha össze akarunk szerelni egy számítógépet, akkor a szerelő sor beindítása 20 euróba kerül valamint a gépek összeszerelése darabonként 18 euróba.” Az $Osszeszereles$ műveleti egység fix működési költsége 20, proporcionális pedig 18 lesz.
- „Kaptunk egy megrendelést Balatonalmádiból 240 számítógépre, amit a lehető legolcsóbban akarunk kielégítenünk.” A termékünk a leszállított számítógép lesz, amit a továbbiakban $PC\_Almadiban$ néven nevezünk. A termékmenyiséghez tartozik egy alsó korlát 240.
- „A számítógépeket kamionnal tudjuk elszállítani Balatonalmádiba, egy kamionba legfeljebb 900 számítógép fér.” Lesz szállítást jelölő műveleti egységünk. Pontosabban kettő is lesz, mivel külön szállítunk Veszprémből és Székesfehérvárról. Az egyik neve $Szallitas\_Veszprembol$, a másiké $Szallitas\_Fehervarrol$ lesz. Mind a két műveleti egység rendelkezik egy 900 értékű kapacitáskorláttal.
- „A kamionok felpakolása a számítógépek számától függetlenül 20 euróba kerül.” A rendszerben lesz három darab rakodást jelölő műveleti egység, mivel három helyszínen lehet felrakodni. Mind a három műveleti egység fix működési költsége 20 értéket vesz fel. Az első a $Rakodas\_Veszpremben$ nevet viseli, amelynek bemenete a $PC\_veszpremi\_raktarban$ nyersanyag lesz, a kimeneti anyaga a $Szallitas\_Veszprembol$ műveleti egység bemenete lesz és $PC\_kamionon\_Veszpremben$-nek nevezzük. Hasonlóképpen lesz kettő rakodást jelző műveleti egység a fehérvári helyszínekhez is, a $Rakodas\_Fehervar\_raktarban$ a raktárhoz valamint az összeszerelőhöz a $Rakodas\_Fehervar\_osszeszereloben$. A két rakodás ugyanazt az anyagot fogja előállítani, ami a $PC\_kamionon\_Fehervaron$ nevet viseli és amelyik bemenete lesz a $Szallitas\_Fehervarrol$ műveleti egységnek.
- „A szállítás költsége Balatonalmádiba Veszprémből 18 euró, Fehérvárról pedig 40 euró.” A $Szallitas\_Veszprembol$ műveleti egység fix működési költsége 18, a $Szallitas\_Fehervarrol$ költsége pedig 40 lesz.
- „Egy kamion lerakodásának költsége 20 euró.” Kettő darab lerakodást jelölő műveleti egységre van szükség, mivel a költség attól függ, hogy hány helyről szállítunk. A $Lerakodas\_Veszprembol$ műveleti egység bemenete a $Szallitas\_Veszprembol$ műveleti egység kimenete lesz, amit nevezzünk $PC\_kamionon\_Veszprembol$-nek, a $Lerakodas\_Fehervarrol$ egység bemenete a $Szallitas\_Fehervarrol$ műveleti egység kimenete lesz, amit nevezzünk PC_kamio-



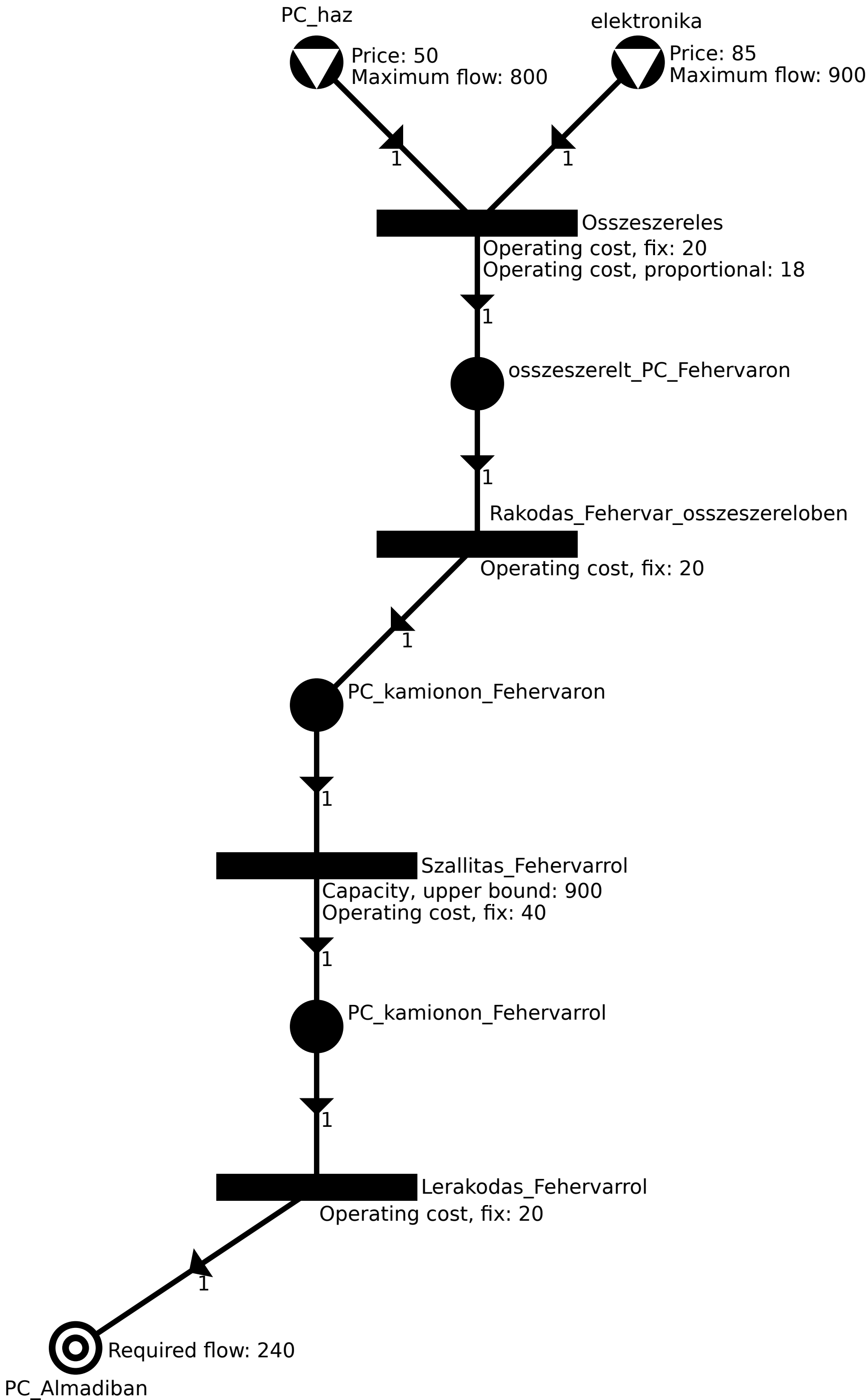
3.8. ábra. A 3.6-os feladat folyamatának struktúrája

$non\_Fehervarrol$-nak. Mind a két műveleti egység kimenete a termék, azaz a $PC\_Almadiban$ anyag lesz és a fix működési költsége mindegyiknek 20 értékű lesz.

A szállítás struktúráját a 3.8-as ábrán láthatjuk. Könnyen ellenőrizhető, hogy a struktúrára teljesülnek a kombinatorikus axiómák, azaz a P-gráf egyben a feladat maximális struktúrája is.

A feladatot PNS Studio-val megoldva azt kapjuk, hogy Székesfehérváron össze kell szerelni a 240 számítógépet és elszállítani Balatonalmádiba. Ebben az esetben a nyersanyag költség a 240 darab számítógép ház és a 480 darab elektronika árából adódik 12.000 és 20.400 eurónak. Az összeszerelés költsége a 20 eurós beindítási költségből és a 240 gép egyenkénti 18 eurós összeszerelési költségéből adódik 4.340 eurónak. A felrakodás 20 euróba, a szállítás 40 euróba, a lerakodás pedig 20 euróba kerül darabszámtól függetlenül. Így összesen 36.820 euró a teljes költség. Az optimális megoldáshoz tartozó megoldásstruktúra a 3.9-es ábrán látható.

A második legjobb megoldás szerint Veszprémben megvásároljuk a lehetséges 200 darab kész számítógépet és a maradék 40 számítógépet Székesfehérváron szerezzük be. Így a veszprémi vásárlásból adódó költség a 200 számítógép megvásárlása egyenként 225 euró, valamint a felrakodási, szállítási és lerakodási költség összesen 58 euró, azaz összesen 54.538 euró. A harmadik legjobb megoldás alapján csak Székesfehérváron vásárolunk számítógépet, amely a szállítási és rakodási költségekkel együtt összesen 56.480 euróba kerül. Az összes többi megoldásstruktúra redundánsan olyan megoldásokat ad vissza, ahol a struktúra valamely része nincs kihasználva.



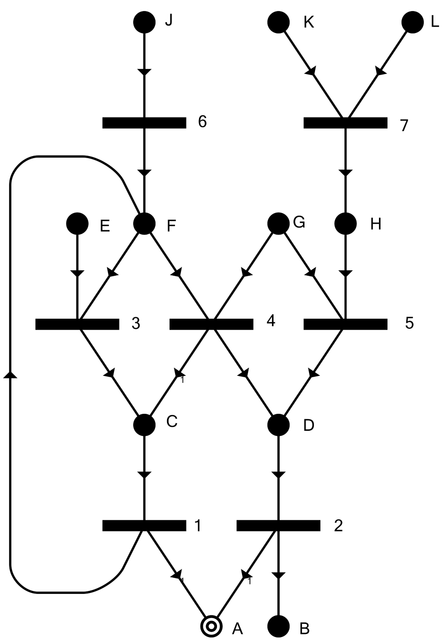
3.9. ábra. A 3.6-os feladat optimális megoldásstruktúrája

4. PÉLDATÁR

Megbízható folyamatok szintézise

4.1. Feladatok időtényező nélkül

1. Feladat



4.1. ábra

Határozzuk meg a 4.1-es ábra prímstruktúráit illetve abból a rendszer megbízhatósági függvényét, ahol a rendszer végtermékeinek illetve nyersanyagainak a halmaza $\mathcal{P}$ és $\mathcal{R}$, rendre $\mathcal{P} = \{A\}$, $\mathcal{R} = \{E, J, K, L\}$.

Megoldás

Egy rendszer megbízhatóságának vizsgálatakor hasznos megkeresni a prímstruktúrákat. Egy olyan algoritmust kívánunk kidolgozni, ami a rendszer működőképességét meghatározó monoton

$$\Psi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

függvény ismeretében visszatér annak prímstruktúráival, ahol az n az alkotó elemek száma. Prímstruktúra olyan érték, melyre Ψ igaz, bármely nála kisebb elemre már hamis.

A monotonitás miatt kézenfekvő az n elemű rendezett bool sorozatokból egy gráfot alkotni, ahol x csúcsnak akkor gyermeke y csúcs, ha a kettő minden eleme megegyezik egyet kivéve, ahol $x_i = 1$ és $y_i = 0$. Vegyük észre, hogy a monotonitás miatt triviálisan, ha egy x csúcsra $\Psi(x)$ igaz, akkor annak minden ősére igaz, ha pedig hamis, akkor annak minden gyermekére hamis. Tehát átfogalmazva, egy u csúcs akkor prímstruktúra, ha annak minden v gyermekére $\Psi(v) = 0$, viszont $\Psi(u) = 1$. Ezek könnyen rávezetnek az alábbira.

Kiindulva az egy csúcsból végzünk egy bejárást. Amikor olyan csúcshoz érünk, melyre a Ψ nullát ad, annak leszármazottait már nem kell vizsgálni. Azon csúcsok pedig, melyek minden gyermeke nullát ad, prímstruktúrák. A bejárás szokványos algoritmusokkal lineáris memóriaigényű a csúcsokra, tehát exponenciális volna n számra, ezért ezen csiszolni kell. Ha a prímstruktúrák mérete kicsi, akkor hatékonyabb, egyébként kevésbé hatékony, ha a nulla csúcsból végzünk egy bejárást az ősök felé. Az utóbbi módszer van részletesebben kidolgozva. Amikor olyan csúcshoz érünk melyre Ψ egyet ad, annak őseit már nem kell vizsgálni, maga a csúcs pedig prímstruktúra lesz, ha annak minden gyermeke nullát ad.

A felhasznált memória csökkentésének érdekében tehát (négyzetesre a komponensek számának függvényében, erre később kitérek) közvetlenül járható be egy számított feszítőfa. Minden x csúcsnak akkor gyermeke egy y csúcs, ha az eredeti gráf szerinti leszármazást meghatározó i index nagyobb mint x utolsó nulla eleméhez tartozó index. Vegyük észre, hogy ez azt jelenti, hogy egy csúcs jobb testvére úgy számítható, ha az utolsó nulla indexe i, hogy az i-edik elem helyére 1, a következőre pedig nulla kerül. A szülő, az első gyermek, a jobb és bal testvérek egyértelműen meghatározottak. Minden elemnek pontosan akkor van jobb testvére és gyermeke, ha az utolsó nullának az indexe nem n, kivéve a csupa egyes csúcsot. Tekinthető egy bináris fa, melynek gyökere a csupa egyes csúcs, és minden elemnek vagy nulla, vagy két gyermeke van, kivéve a gyökeret, aszerint, hogy a fenti fában van-e gyermeke és testvére. Ezen felfogás szerint látható, hogy $2^n - 1 + 1$ csúcs tartozik a fába. Tehát a feszítőfa valóban feszítőfa, ahol a gyermeket és testvért számítani lineáris időben lehet.

Tekintsünk egy x csúcsot. Nézzük végig az összes feszítőfa szerinti gyermekét. Ha ezen gyermekek közül valamelyikre a Ψ függvény eggyel tér vissza, akkor rekurzívan elvégezzük rá ezen függvényt. Ha mindegyikre nullával tért vissza a Ψ függvény, akkor az eredeti számított fa szerinti maradék gyermekekre kiértékeljük a Ψ függvényt. Ha mindegyikre nullával tért vissza, akkor a vizsgált csúcs prímstruktúra és eltároljuk, feltéve, hogy ezt a függvényt úgy hívtuk meg, hogy Ψ az x csúcsra egy. Ez azonban a rekurzió miatt triviális, ha a gyökérből indulunk. Feltéve, hogy a rendszer eleve működőképes.

Látható, hogy minden csúcsot maximum kétszer értékelek ki (mint jobb oldali gyermek és bal oldali gyermek), és egyszer generálok. A kisebb jelentőségű műveleteket (értékadás, letárolás, ellenőrzés) most elhanyagolom. Ha a prímstruktúrák minimális mérete k, akkor $n - k$ mélységig megyek maximum a fában.

Minden l mélységben maximum n alatt l darab csúcson hajtom végre a megvizsgál eljárást, tehát maximum $(n - l)$ szer (n alatt l) darab csúcs generálás és kétszer ennyi működőképes függvény-végrehajtás történik. Tehát végső soron maximum $O(n^{(n-k+1)}F(n))$ időben fut le az algoritmus, azaz $k = n - 2$ például négyzetes.

Ha az algoritmusunkat alkalmazzuk az a 4.1-es ábrán látható P-gráfra a következő prímstruktúrákat kapjuk:

$$(2, 5, 7); (2, 4, 6); (1, 4); (1, 3).$$

A rendszer karakterisztikus polinomját megkonstruálni vagy számolni a prímkereső algoritmushoz nagyon hasonló módon oldhatjuk meg. A prímstruktúrák által adott események (a prímstruktúra műveleti egységei működnek) uniójának valószínűsége meghatározható szita-formulával. Prímstruktúrák halmazait $\{0, 1\}^k$ elemeivel reprezentáljuk, és a korábban leírt feszítőfa szerint járjuk be. A szita formula szerint venni kell az egy prímstruktúra által alkotott események valószínűségeinek összegét, ki kell vonni a kettő prímstruktúra által alkotott események valószínűségeit, hozzá kell adni a három által alkotottakat, és így tovább.

Algorithm 1

```
procedure Megvizsgál (Csúcs)
  vanIgaz = false
  for i, Csúcs.utolsóNulla() + 1, n do
    Következő = Csúcs.edikGyermek(i)

    if Működőképes(Következő) then
      vanIgaz = true
      Megvizsgál(Következő)
    end if
  end for

  if (vanIgaz) then
    return
  end if

  for i, 0, Csúcs.utolsNulla() − 1 do
    Következő = Csúcs.edikGyermek(i)

    if Következő és Működőképes(Következő) then
      return
    end if
  end for

  Felír(Csúcs)
```

Algorithm 2

```
procedure Ellenőriz(EddigiUnió, Csúcs, Hozzáadás)
  EddigiUnió = Unió(EddigiUnió, Csúcs)

  if Hozzáadás then
    Tábla[EddigiUnió]++

  else
    Tábla[EddigiUnió]−−

  end if
  for i, Csúcs.utolsóNulla() + 1, n do
    Következő = Csúcs.edikGyermek(i)
    Ellenőriz(EddigiUnió, Következő, NEM Hozzáadás)
  end for
```

Ezt az algoritmust alkalmazva az előzőleg kiszámított prímstruktúrákra a következő Q megbízhatósági függvényt kapjuk:

$$Q(x_1,\dots,x_7) = -x_1x_2x_4x_5x_7 + x_2x_5x_7 + x_1x_2x_3x_4x_5x_7 - x_2x_4x_5x_6x_7 + \\ + x_1x_2x_4x_5x_6x_7 - x_1x_2x_3x_5x_7 - x_1x_2x_4x_6 - x_1x_3x_4 + x_1x_3 + x_2x_4x_6 + x_1x_4$$

2. Feladat

Határozzuk meg a 4.1-es ábrával meghatározott rendszer megbízhatósági függvényét abban az esetben, ha az 1-es számú műveleti egységgel párhuzamosan (redundánsan) felveszünk egy ugyanolyan további műveleti egységet.

Megoldás

A korábban kiszámolt $Q_1 = Q(x_1,\dots,x_7)$ megbízhatósági függvényünkben x_1 annak a valószínűsége, hogy az 1-es műveleti egység működik. Így annak a valószínűsége, hogy két párhuzamosan bekötött x_1 valószínűségekkel működő műveleti egység (1.1-es és 1.2-es) közül az egyik működik

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\text{egyik működik}) = 1 - \mathbf{P}(\text{egyik sem működik}) = \\
&= 1 - \mathbf{P}(\{\text{az 1.1-es nem működik}\} \cap \{\text{az 1.2-es nem működik}\}) = \\
&= 1 - \mathbf{P}(\{\text{az 1.1-es nem működik}\})\mathbf{P}(\{\text{az 1.2-es nem működik}\}) = \\
&= 1 - (1 - \mathbf{P}(\{\text{az 1.1-es működik}\}))\,(1 - \mathbf{P}(\{\text{az 1.2-es működik}\})) = \\
&= 1 - (1 - x_1)(1 - x_1) = 2x_1 - x_1^2.
\end{aligned}$$

Ezt kell behelyettesítenünk az eredeti $Q(x_1,\dots,x_7)$ polinomban x_1 helyére az új megbízhatósági függvényünk megkapásához

$$Q_2(x_1,\dots,x_7) = Q_1(2x_1 - x_1^2, x_2,\dots,x_7).$$

3. Feladat

Adjuk meg a 4.1-es ábrán szereplő rendszer megoldás struktúráinak a számát.

Megoldás

Jelölje S a megoldás struktúrák számát. Tegyük fel, hogy mindegyik műveleti egységünk $1/2$ valószínűséggel működik. Ekkor a rendszernek bármelyik állapota azonosan $1/2^7$ valószínűséggel fordulhat elő. Ekkor annak a valószínűsége, hogy működik a rendszer

$$\mathbf{P}(\text{működik a rendszer}) = \frac{S}{2^7}.$$

Ugyanakkor a megbízhatósági függvényünkből tudjuk, hogy

$$\mathbf{P}(\text{működik a rendszer}) = Q\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right)$$

ezeket felhasználva megkaphatjuk a megoldás struktúrák számát

$$\frac{S}{2^7} = Q\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right)$$

$$S = 2^7 Q\left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right) = 2^7\Bigg(-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+$$
$$+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}\Bigg) = -2^2+2^4+2-2^2+2-2^2-2^3-2^4+2^5+2^4+2^5 = 80.$$

4. Feladat

Adjuk meg a 4.1-es ábrán meghatározott rendszer esetében annak a rendszereseménynek az indikátor függvényét, amelyet a következőképpen írhatunk le: „A rendszer működőképes, de a G nyersanyag nem áll rendelkezésre”

Megoldás

Ha a G nyersanyag nem áll rendelkezésünkre, leolvasható a 4.1-es ábráról, hogy ekkor a 4-es és 5-ös műveleti egység biztosan nem tudni fog működni (még akkor se, ha amúgy üzemképes). Így az új megbízhatósági függvényt megkaphatjuk, ha az eredeti $Q(x_1,\ldots,x_7)$ megbízhatósági függvényünkben x_4 és x_5 helyére nullát helyettesítünk

$$Q_{-G}(x_1,\ldots,x_7) = Q(x_1,x_2,x_3,0,0,x_6,x_7) = x_1x_3.$$

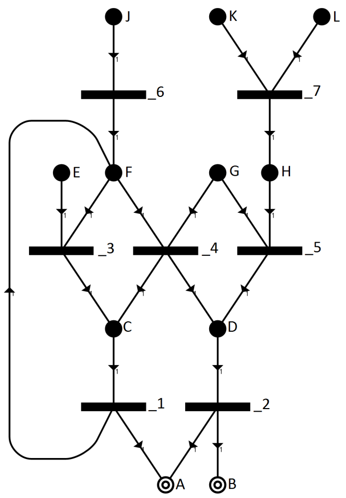
Tehát ekkor a rendszerünk pontosan az 1-es és a 3-as műveleti egység együttes üzemelése esetén fog működni.

5. Feladat

Adjuk meg a 4.1-es ábrával meghatározott rendszer esetében annak a rendszereseménynek a valószínűségét, amelyet a következőképpen írhatunk le: „A rendszer B mellékterméket nem termel” és tudjuk, hogy minden berendezés megbízhatósági értéke $80 * 10^{-2}$.

Megoldás

Jelölje A azt a rendszereseményt, hogy a rendszer működik, B pedig, hogy a rendszer termel B mellékterméket. A 4.1-es ábrából egyértelműen látható, hogy B bekövetkezése esetén biztosan be-



4.2. ábra

következik A is, tehát $B \subseteq A$. Ahhoz, hogy meghatározzuk mekkora az esélye, hogy A végterméket tudunk termelni, miközben B rendszeresemény nem következik be, ki kell vonni A bekövetkezési valószínűségéből A és B együttes bekövetkezésének a valószínűségét

$$\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Ezekből $\mathbf{P}(A)$ értékét könnyen kiszámíthatjuk az 1-es feladatban meghatározott megbízhatósági polinomunkkal

$$\mathbf{P}(A) = Q\left(\frac{8}{10}, \dots, \frac{8}{10}\right) = 0,923648.$$

Az $A \cap B$ esemény valószínűségének meghatározásához módosítsuk úgy az eredeti P-gráfot, hogy B termék is legyen végtermék.

Ha ezáltal a gráf által meghatározott rendszer működik, az pontosan azt jelenti, hogy A és B terméket is termelünk. A már korábban bemutatott algoritmusunkkal kiszámítjuk az új rendszerünk megbízhatósági polinomját, amely

$$\begin{aligned} Q_{A\cap B}(x_1, \dots, x_7) = &-x_1x_2x_4x_5x_7 + x_1x_2x_4 + x_2x_5x_7 - x_2x_4x_5x_6x_7 + \\ &+ x_1x_2x_4x_5x_6x_7 - x_1x_2x_4x_6 + x_2x_4x_6. \end{aligned}$$

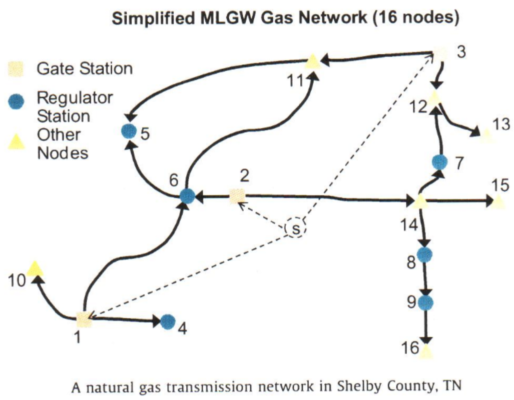
Ez alapján

$$\mathbf{P}(A \cap B) = Q_{A\cap B}\left(\frac{8}{10}, \dots, \frac{8}{10}\right) = 0,733184,$$

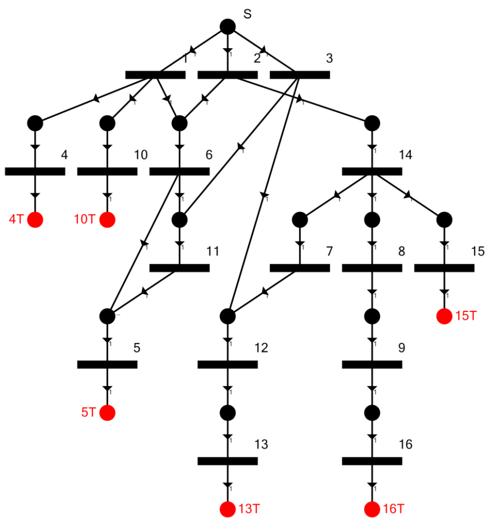
amiből most már kiszámítható a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0,923648 - 0,733184 = 0,19046.$$

6. Feladat



4.3. ábra



4.4. ábra

Határozzuk meg a 4.4-es ábrán látható gázhálózat megbízhatóságát, ha a rendszer végtermékeinek illetve nyersanyagainak (betáplálás illetve elvételi pontjainak) a halmaza P és R, rendre

$$P = \{S\}, R = \{4T, 5T, 10T, 13T, 15T, 16T\}$$

továbbá minden műveleti egység megbízhatósági értéke $99 * 10^{-2}$.

Megoldás

A korábban bemutatott algoritmusunkkal meghatározzuk a prímstruktúrákat melyek

$$(1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16);$$
$$(1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16);$$
$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16),$$

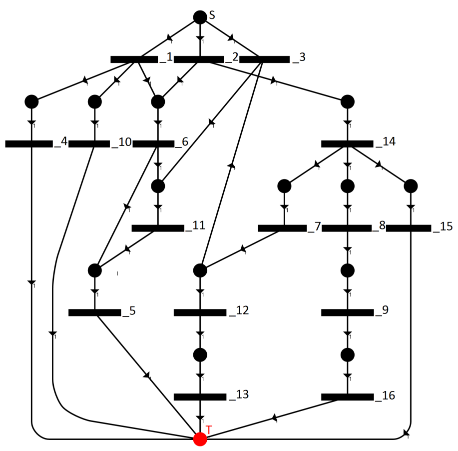
a megbízhatósági polinom pedig

$$\begin{aligned} Q(x_1, \ldots, x_{16}) = {} & x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_8x_9x_{10}x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}x_{16}- \\ & - x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}x_{16}+ \\ & + x_1x_2x_3x_4x_5x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}x_{16}+ \\ & + x_1x_2x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}x_{16}+ \\ & - x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}x_{16}. \end{aligned}$$

7. Feladat

Ha a 4.4-es ábrán látható gázhálózat minden műveleti egységének működési valószínűsége $99 * 10^{-2}$, akkor mi a valószínűsége, hogy valamelyik átvételi pontra érkezik gáz a rendszerből.

Megoldás



4.5. ábra

Hozzunk létre egy P-gráfot, amely csak annyiban különbözik a gázhálózatnak az ábrázolásától, hogy a pirossal jelölt átvételi pontokat vonjuk össze egyetlen átvételi pontba, amelybe pontosan onnan mennek élek, ahonnan a korábbi átvételi pontokba mentek.

Ezáltal a gráf által meghatározott rendszer pontosan akkor lesz működőképes, ha az eredeti rendszerünkben valamelyik átvételi pont elérhető. Tehát a már többször használt megbízhatósági polinomot számító algoritmusunkat kell alkalmazni az újonnan kreált rendszerünkre, és meghatározni $99 * 10^{-2}$ helyettesítési értékre az eredményt. Az algoritmus végeredményét most nem fogjuk itt közzé tenni, mivel több oldalnyi hosszú a polinom. Ugyanakkor, mivel a feladatban minden műveleti egység azonos valószínűséggel üzemel, ezért elegendő egyetlen változóra megadni

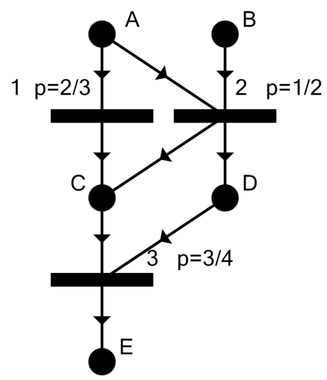
$$Q(x) = 2x^{15} - 9x^{14} + 11x^{13} + 3x^{12} - 9x^{11} - 3x^{10} - x^9 + 8x^8 + 4x^7 - \\ - x^6 - 7x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2.$$

Ennek segítségével megadhatjuk a kérdésre a választ,

$$Q\left(99 * 10^{-2}\right) \approx 0,9982$$

az esélye, hogy valamelyik átvételi pontra érkezik gáz.

8. Feladat



4.6. ábra

Lehet-e a 4.6-os ábrán látható rendszeren úgy változtatni valamely műveleti egység többszörözésével (redundáns módon történő beépítésével) hogy a rendszer megbízhatósága nagyobb legyen mint $0 < p < 1$?

Megoldás

Az ábrából könnyen kikövetkeztethető, hogy a rendszer pontosan akkor lesz működőképes, ha a 2-es és a 3-es műveleti egység egyszerre üzemel. Ugyanis egyértelműen látszik, hogy a 3-as egység szükséges a végtermék előállításához, ami viszont D nyersanyagot is igényel, melyet csak a 2-es egység állíthat elő. Ugyanakkor a 2-es műveleti egység előállít C nyersanyagot is, így az 1-es műveleti egység működése vagy nem működése nem befolyásolja a rendszer üzemelését. Tehát a megbízhatósági függvényünk

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3.$$

Ha csak egy műveleti egységet lehet párhuzamosítanunk a rendszer megbízhatósága a 3/4 értéket nem érheti el. Ugyanis ha az i egységből n darab párhuzamos egységet készítünk, akkor annak a valószínűsége, hogy valamelyik üzemel

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\text{egyik üzemel}) &= 1 - \mathbf{P}(\text{egyik sem üzemel}) = \\ &= 1 - \mathbf{P}(\cap_{k=1}^{n}\{\text{a k-adik párhuzamos egység nem üzemel}\}) = \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\{\text{a k-adik párhuzamos egység nem üzemel}\}) =\end{aligned}$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{P}(\{\text{a k-adik párhuzamos egység üzemel}\})) =$$
$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - x_i) = 1 - (1 - x_i)^n,$$

így ha n értékét növeljük akkor, mivel az x_i 0 és 1 közé esik, a rendszer ezen részének megbízhatósága közelít 1-hez. Ezért, amennyiben csak az egyik egységet párhuzamosítjuk, akkor érdemes a 2-es műveleti egységet. Ekkor, ha n darab párhuzamos egységet hozunk létre, a rendszer megbízhatósága

$$Q = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n\right) \frac{3}{4} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \frac{3}{4},$$

és ha $n \to \infty$, akkor $Q \to 3/4$. Amennyiben a 3-as egységet többszöröznénk, akkor csak az 1/2 értéket tudnánk megközelíteni. Mint azt már kifejtettük fentebb, az 1-es egység többszörözése nem befolyásolná a rendszer megbízhatóságát. Amennyiben a 2-es és a 3-as egységet is többszörözhetjük, bármilyen 1-nél kisebb érték elérhető.

4.2. Feladatok folytonos időben

Megbízhatóság folytonos időben

A továbbiakban úgy képzeljük a modellünket, hogy a kezdeti (nulla) időpontban mindegyik műveleti egység üzemel, és az idő előrehaladtával bizonyos valószínűséggel elromolhatnak. Legyen i műveleti egység állapota a t időpontban

$$x_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{, ha az egység működik} \\ 0 & \text{, ha az egység nem működik,} \end{cases}$$

és a rendszer állapot a t időpontban

$$\Psi(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \begin{cases} 1 & \text{, ha az rendszer működik} \\ 0 & \text{, ha az rendszer nem működik.} \end{cases}$$

Jelölje az i műveleti egység meghibásodásának az időpillanatát a τ_i valószínűségi változó

$$x_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } t < \tau_i \\ 0 & \text{, ha } t \geq \tau_i. \end{cases}$$

Annak a valószínűsége, hogy a t időpontig meghibásodik az egység a τ_i eloszlásfüggvénye a t időpillanatban

$$F_i(t) = \mathbf{P}(\tau_i < t),$$

annak a valószínűsége pedig, hogy a t időpontban még működik a művletei egység a τ_i túlélési függvénye a t időpillanatban

$$R_i(t) = 1 - F_i(t) = \mathbf{P}(\tau_i \geq t).$$

Megjegyzés: mivel a τ_i folytonos valószínűségi változó, minden időpontot nulla valószínűséggel vesz fel.

Jelölje a rendszer meghibásodásának az időpillanatát a τ valószínűségi változó

$$\Psi(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } t < \tau \\ 0 & \text{, ha } t \geq \tau. \end{cases}$$

Annak a valószínűsége, hogy a t időpontig leáll a rendszer a τ eloszlásfüggvénye a t időpillanatban

$$F(t) = \mathbf{P}(\tau < t),$$

annak a valószínűsége pedig, hogy a t időpontban még működik a rendszer a τ túlélési függvénye a t időpillanatban

$$R(t) = 1 - F(t) = \mathbf{P}(\tau \geq t).$$

Megjegyzés: mivel a τ folytonos valószínűségi változó, minden időpontot nulla valószínűséggel vesz fel.

Feladatok és megoldásaik

9. Feladat

Tételezzük fel, hogy a 4.1-es ábrával meghatározott rendszerben minden műveleti egységnek a működési idejei exponenciális eloszlást követ $\lambda_1, \ldots, \lambda_7$ paraméterekkel. Határozzuk meg a rendszer működési idejének az eloszlás függvényét, túlélési függvényét és sűrűségfüggvényét. Ábrázoljuk őket feltéve, hogy mindegyik műveleti egység átlagosan 1, 2 illetve 3 időegységnyi ideig üzemel.

Megoldás

Ha műveleti egységeink működési ideje exponenciális eloszlást követnek rendre λ_i, $i = 1, \ldots, 7$ paraméterekkel, akkor az eloszlásfüggvényük,

$$F_i(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i t} \quad i = 1, \ldots, 7,$$

a túlélési függvényük

$$R_i(t) = 1 - F_i(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_i t} \quad i = 1, \ldots, 7.$$

Ha a rendszer $Q(x_1, \ldots, x_n)$ megbízhatósági polinomjába behelyettesítjük az egyes műveleti egységek működésének a valószínűségét, akkor megkapjuk, hogy a rendszer mekkora valószínűséggel üzemel

$$p_i = \mathbf{P}(\text{az } i \text{ műveleti egység üzemel}),\ i = 1, \ldots, 7$$

$$P = \mathbf{P}(\text{a rendszer működik}) = Q(p_1, \ldots, p_7).$$

Folytonos időbe átültetve ezt az eredményt, ha azt szeretnénk megtudni, hogy a t időpillanatban mekkora eséllyel működőképes a rendszer, azaz szeretnénk meghatározni a túlélési függvényét a működési idejének, csak be kell helyettesítenünk a megbízhatósági polinomba, hogy az adott t időpontban az egyes egységek mekkora valószínűséggel üzemelnek. Ezek az értékek viszont pont az egyes műveleti egységek túlélési függvénye a t időpontban, így a rendszer túlélési függvénye

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathbf{P}(\text{a rendszer működik a } t \text{ időpontban}) = Q(R_1(t), \ldots, R_7(t)) = \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{e}^{-\lambda_4 t}\mathrm{e}^{-\lambda_5 t}\mathrm{e}^{-\lambda_7 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{e}^{-\lambda_5 t}\mathrm{e}^{-\lambda_7 t} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{e}^{-\lambda_3 t}\mathrm{e}^{-\lambda_4 t}\mathrm{e}^{-\lambda_5 t}\mathrm{e}^{-\lambda_7 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{e}^{-\lambda_4 t}\mathrm{e}^{-\lambda_5 t}\mathrm{e}^{-\lambda_6 t}\mathrm{e}^{-\lambda_7 t}+\\
&+ \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{e}^{-\lambda_4 t}\mathrm{e}^{-\lambda_5 t}\mathrm{e}^{-\lambda_6 t}\mathrm{e}^{-\lambda_7 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{e}^{-\lambda_3 t}\mathrm{e}^{-\lambda_5 t}\mathrm{e}^{-\lambda_7 t}-\\
&- \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{e}^{-\lambda_4 t}\mathrm{e}^{-\lambda_6 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_3 t}\mathrm{e}^{-\lambda_4 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_3 t}+\\
&+ \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{e}^{-\lambda_4 t}\mathrm{e}^{-\lambda_6 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_4 t} = -\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7)t}+\\
&+ \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_5+\lambda_7)t} + \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7)t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7)t}+\\
&+ \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7)t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7)t}-\\
&- \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)t} + \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_3)t}+\\
&+ \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)t} + \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_4)t}.
\end{aligned}$$

A most meghatározott túlélési függvényünkből már könnyen megadható a rendszer működési idejének az eloszlásfüggvénye

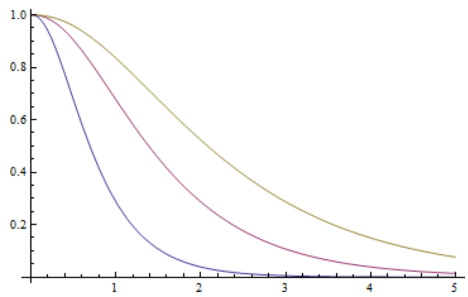
$$\begin{aligned}
F(t) = 1 - R(t) = 1 &+ \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7)t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_5+\lambda_7)t}-\\
&- \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7)t} + \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7)t}-\\
&- \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7)t} + \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7)t}+\\
&+ \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)t} + \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_3)t}-\\
&- \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_4)t}.
\end{aligned}$$

Az eloszlás függvény deriválásával könnyen megadható a rendszer sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned}
f(t) = F'(t) = &-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7)t}+\\
&+ (\lambda_2+\lambda_5+\lambda_7)\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_5+\lambda_7)t}+\\
&+ (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7)t}-\\
&- (\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7)\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7)t}+\\
&+ (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7)t}-\\
&- (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7)t}-\\
&- (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)t}-\\
&- (\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)t} + (\lambda_1+\lambda_3)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_3)t}+\\
&+ (\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)t} + (\lambda_1+\lambda_4)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_4)t}.
\end{aligned}$$

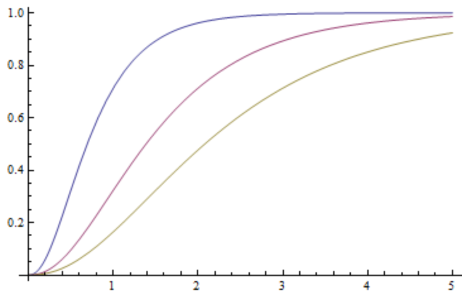
Ha minden műveleti egység átlagosan azonos λ paraméterrel rendelkezik, 1, 2 illetve 3 ideig üzemel, akkor mindegyik λ paraméter 1, 1/2, illetve 1/3 . A túlélési függvény azonos λ paraméter esetén

$$R(t) = -2\mathrm{e}^{-2\lambda t} + \mathrm{e}^{-3\lambda t} - \mathrm{e}^{-4\lambda t} - 3\mathrm{e}^{-5\lambda t} + 2\mathrm{e}^{-6\lambda t},$$



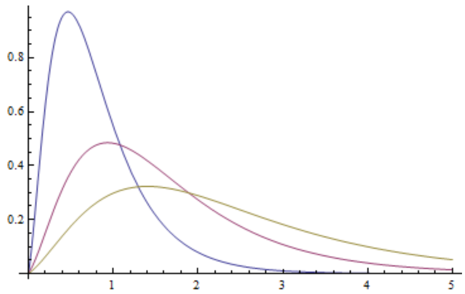
az eloszlás függvény

$$F(t) = 1 + 2\mathrm{e}^{-2\lambda t} - \mathrm{e}^{-3\lambda t} + \mathrm{e}^{-4\lambda t} + 3\mathrm{e}^{-5\lambda t} - 2\mathrm{e}^{-6\lambda t},$$



illetve a sűrűségfüggvény

$$f(t) = -4\lambda \mathrm{e}^{-2\lambda t} + 3\lambda \mathrm{e}^{-3\lambda t} - 4\lambda \mathrm{e}^{-4\lambda t} - 15\lambda \mathrm{e}^{-5\lambda t} + 12\lambda \mathrm{e}^{-6\lambda t}.$$



10. Feladat

Tételezzük fel, hogy a 4.1-es ábrával meghatározott rendszerben minden műveleti egységének a működési ideje exponenciális eloszlást követ $\lambda_1, \dots, \lambda_7$ paraméterekkel. Határozzuk meg, hogy átlagosan mennyi ideig üzemel a rendszer. Feltéve, hogy mindegyik műveleti egység azonos λ paraméterrel rendelkezik, ábrázoljuk a várható működési időt a λ függvényében.

Megoldás

Hogy meghatározzuk a rendszer átlagos működési idejét, a τ várható értékét kell kiszámolnunk. Definíció szerint egy $F(t)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező változónak a várható értékét a

$$\mathbf{E}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} t \,\mathrm{d}F(t).$$

Stieltjes integrállal lehet kiszámítani. Erre alkalmazva a Fubini tételt kapható a következő formula

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} t \,\mathrm{d}F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t 1 \,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}F(t) = \\ &= \int_0^{-\infty} \left(\int_{-\infty}^{u} 1 \,\mathrm{d}F(t)\right) \mathrm{d}u + \int_0^{\infty} \left(\int_u^{\infty} 1 \,\mathrm{d}F(t)\right) \mathrm{d}u = \\ &= \int_0^{-\infty} F(u) \,\mathrm{d}u + \int_0^{\infty} 1 - F(u) \,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy a τ értéke csak pozitív lehet, és emiatt az eloszlás függvénye a negatív helyeken 0 értéket vesz fel

$$\mathbf{E}(\tau) = \int_0^{-\infty} F(u) \,\mathrm{d}u + \int_0^{\infty} 1 - F(u) \,\mathrm{d}u = \int_0^{\infty} 1 - F(u) \,\mathrm{d}u = \int_0^{\infty} R(u) \,\mathrm{d}u,$$

tehát elegendő a túlélési függvényt integrálnunk a pozitív félegyenesen. Az integrálás lineáris tulajdonsága miatt érdemes tagonként integrálni a túlélési függvényt. Általánosan egy tag integrálja

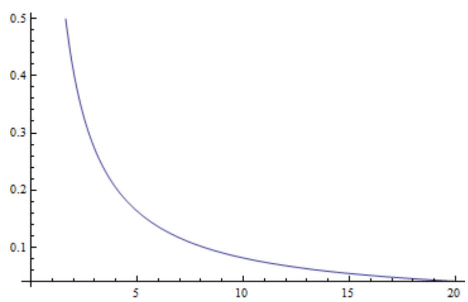
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_{i_1}+\dots\lambda_{i_n})t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\lambda_{i_1}+\dots\lambda_{i_n}}\mathrm{e}^{-(\lambda_{i_1}+\dots\lambda_{i_n})t}\right]_0^\infty = \\ = 0 - \left(-\frac{1}{\lambda_{i_1}+\dots\lambda_{i_n}}\right) = \frac{1}{\lambda_{i_1}+\dots\lambda_{i_n}}.$$

Ez alapján a rendszer átlagos működési ideje:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\tau) = &\int_0^\infty R(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7)t}\,\mathrm{d}t+\\ &+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_5+\lambda_7)t}\,\mathrm{d}t+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7)t}\,\mathrm{d}t-\\ &-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7)t}\,\mathrm{d}t+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7)t}\,\mathrm{d}t-\\ &-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7)t}\,\mathrm{d}t-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)t}\,\mathrm{d}t-\\ &-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)t}\,\mathrm{d}t+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_3)t}\,\mathrm{d}t+\\ &+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)t}\,\mathrm{d}t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_4)t}\,\mathrm{d}t=\\ &=-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7}+\frac{1}{\lambda_2+\lambda_5+\lambda_7}+\\ &+\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7}-\frac{1}{\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7}+\\ &+\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7}-\\ &-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4}+\frac{1}{\lambda_1+\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6}+\\ &+\frac{1}{\lambda_1+\lambda_4}.\end{aligned}$$

A várható érték λ szerinti alakulásának grafikonjához csak be kell helyettesíteni a fenti eredményünkben $\lambda_1,\dots,\lambda_7$ helyére λ-t és ábrázolnunk

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\tau) = &-\frac{1}{\lambda+\lambda+\lambda+\lambda+\lambda}+\frac{1}{\lambda+\lambda+\lambda}+\frac{1}{\lambda+\lambda+\lambda+\lambda+\lambda+\lambda}-\\ &-\frac{1}{\lambda+\lambda+\lambda+\lambda+\lambda}+\frac{1}{\lambda+\lambda+\lambda+\lambda+\lambda+\lambda}-\\ &-\frac{1}{\lambda+\lambda+\lambda+\lambda+\lambda}-\frac{1}{\lambda+\lambda+\lambda+\lambda}-\frac{1}{\lambda+\lambda+\lambda}+\frac{1}{\lambda+\lambda}+\\ &+\frac{1}{\lambda+\lambda+\lambda}+\frac{1}{\lambda+\lambda}=\frac{49}{60\lambda}.\end{aligned}$$



11. Feladat

Tételezzük fel, hogy a 4.1-es ábrával meghatározott rendszerben minden műveleti egységének a működési ideje Weibull eloszlást követ $\lambda_1, \ldots, \lambda_7$ és $k_1, \ldots, k_7$ paraméterekkel. Határozzuk meg a rendszer működési idejének a túlélési függvényét. Ábrázoljuk a túlélési és a sűrűségfüggvényt feltéve, hogy mindegyik műveleti egység λ paramétere 1, 2 illetve 3 értékű, és ha a k paramétere 1/2, 1, és 2.

Megoldás

Ha műveleti egységeink működési ideje exponenciális eloszlást követnek rendre λ_i, $i = 1, \ldots, 7$ paraméterekkel, akkor az eloszlásfüggvényük,

$$F_i(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_i}\right)^k} \quad i = 1, \ldots, 7,$$

a túlélési függvényük

$$R_i(t) = 1 - F_i(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_i}\right)^k} \quad i = 1, \ldots, 7.$$

Ha a rendszer $Q(x_1, \ldots, x_n)$ megbízhatósági polinomjába behelyettesítjük

az egyes műveleti egységek működésének a valószínűségét, akkor megkapjuk, hogy a rendszer mekkora valószínűséggel üzemel

$$p_i = \mathbf{P}(\text{az } i \text{ műveleti egység üzemel}), \; i = 1, \ldots, 7$$

$$P = \mathbf{P}(\text{a rendszer működik}) = Q(p_1, \ldots, p_7).$$

Folytonos időbe átültetve ezt az eredményt, ha azt szeretnénk megtudni, hogy a

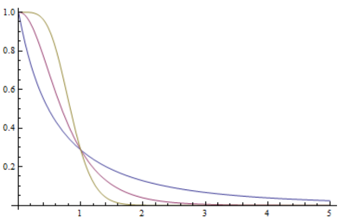
t időpillanatban mekkora eséllyel működőképes a rendszer, azaz szeretnénk meghatározni a túlélési függvényét a működési idejének, csak be kell helyettesítenünk a megbízhatósági polinomba, hogy az adott t időpontban az egyes egységek mekkora

valószínűséggel üzemelnek. Ezek az értékek viszont pont az egyes műveleti egységek túlélési függvénye a t időpontban, így a rendszer túlélési függvénye

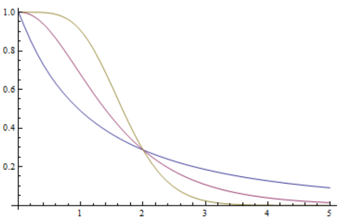
$$\begin{aligned}
R(t) &= \mathbf{P}(\text{a rendszer működik a } t \text{ időpontban}) = \\
&= -\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{k_1}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_2}\right)^{k_2}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_4}\right)^{k_4}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_5}\right)^{k_5}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_7}\right)^{k_7}} + \\
&+ \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_2}\right)^{k_2}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_5}\right)^{k_5}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_7}\right)^{k_7}} + \\
&+ \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{k_1}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_2}\right)^{k_2}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_3}\right)^{k_3}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_4}\right)^{k_4}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_5}\right)^{k_5}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_7}\right)^{k_7}} - \\
&- \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_2}\right)^{k_2}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_4}\right)^{k_4}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_5}\right)^{k_5}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_6}\right)^{k_6}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_7}\right)^{k_7}} + \\
&+ \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{k_1}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_2}\right)^{k_2}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_4}\right)^{k_4}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_5}\right)^{k_5}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_6}\right)^{k_6}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_7}\right)^{k_7}} - \\
&- \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{k_1}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_2}\right)^{k_2}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_3}\right)^{k_3}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_5}\right)^{k_5}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_7}\right)^{k_7}} - \\
&- \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{k_1}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_2}\right)^{k_2}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_4}\right)^{k_4}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_7}\right)^{k_6}} - \\
&- \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{k_1}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_2}\right)^{k_3}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_4}\right)^{k_4}} + \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{k_1}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_4}\right)^{k_3}} + \\
&+ \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_2}\right)^{k_2}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_4}\right)^{k_4}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_6}\right)^{k_6}} + \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{k_1}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda_4}\right)^{k_4}},
\end{aligned}$$

Azonos λ és k paraméterek esetén a túlélési függvény

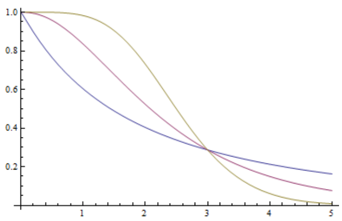
$$R(t) = -2\mathrm{e}^{-2\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} + \mathrm{e}^{-3\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} - \mathrm{e}^{-4\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} - 3\mathrm{e}^{-5\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} + 2\mathrm{e}^{-6\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k},$$



4.7. ábra. $\lambda = 1$



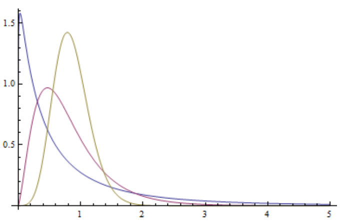
4.8. ábra. $\lambda = 2$



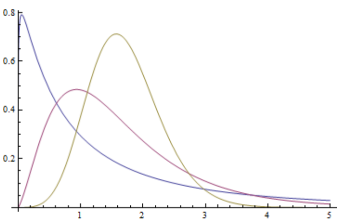
4.9. ábra. $\lambda = 3$

a sűrűségi függvény pedig

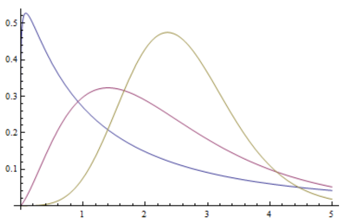
$$\begin{aligned}
f(t) = F'(t) = -R'(t) = &-4\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1}\mathrm{e}^{-2\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} + 3\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1}\mathrm{e}^{-3\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} - \\
&- 4\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1}\mathrm{e}^{-4\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} - 15\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1}\mathrm{e}^{-5\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} + \\
&+ 12\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1}\mathrm{e}^{-6\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k}.
\end{aligned}$$



4.10. ábra. $\lambda = 1$



4.11. ábra. $\lambda = 2$



4.12. ábra. $\lambda = 3$

12. Feladat

Tételezzük fel, hogy az a 4.1-es meghatározott rendszerben minden műveleti egységének a működési ideje weibull eloszlást követ $\lambda_1, \ldots, \lambda_7$ és azonos $k_i = 2$, $i = 1, \ldots, 7$ paraméterekkel. Határozzuk meg a rendszer átlagos működési idejét!

Megoldás

A várható érték meghatározását a 2. feladatban bemutatott módszerrel végezzük, miszerint

$$\mathbf{E}(\tau) = \int_0^\infty R(u)\,\mathrm{d}u.$$

Az előző feladatban már meghatároztuk általános esetben a működési idő túlélési függvényét, ami $k = 2$ paraméter mellett

$$R(u) = -\mathrm{e}^{-\left(\frac{t^2}{\lambda_1^2}+\frac{t^2}{\lambda_2^2}+\frac{t^2}{\lambda_4^2}+\frac{t^2}{\lambda_5^2}+\frac{t^2}{\lambda_7^2}\right)} + \cdots + \mathrm{e}^{-\left(\frac{t^2}{\lambda_1^2}+\frac{t^2}{\lambda_4^2}\right)}.$$

Ennek a függvénynek az integrálását érdemes először tagonként elvégeznünk. Egy általános tag integráltja

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(\frac{t^2}{\lambda_{i_1}^2}+\cdots+\frac{t^2}{\lambda_{i_n}^2}\right)}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2\left(\frac{1}{\lambda_{i_1}^2}+\cdots+\frac{1}{\lambda_{i_n}^2}\right)}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\infty e^{-\left(t\sqrt{\frac{1}{\lambda_{i_1}^2}+\cdots+\frac{1}{\lambda_{i_n}^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Alkalmazzunk helyettesítéses integrálást, legyen

$$u = t\sqrt{\frac{1}{\lambda_{i_1}^2}+\cdots+\frac{1}{\lambda_{i_n}^2}}$$

ekkor

$$\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{i_1}^2}+\cdots+\frac{1}{\lambda_{i_n}^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(t\sqrt{\frac{1}{\lambda_{i_1}^2}+\cdots+\frac{1}{\lambda_{i_n}^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_{i_1}^2}+\cdots+\frac{1}{\lambda_{i_n}^2}}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Az e^{-u^2} integráltját a pozitív félegyenesen kétváltozós integrálással számítjuk ki

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\int_0^\infty \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v} = \sqrt{\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}.$$

Térjünk át polár koordinátákra

$$u = r\sin\varphi$$
$$v = r\cos\varphi,$$

$$\sqrt{\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u} = \sqrt{\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\mathrm{e}^{-r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r} =$$
$$= \sqrt{\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r} = \sqrt{\frac{\pi}{2}\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r} = \sqrt{\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^\infty} =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Összegezve az eredményeinket, az eredeti integrál egy általános tagjának az integrálja

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(\frac{t^2}{\lambda_{i_1}^2}+\cdots+\frac{t^2}{\lambda_{i_n}^2}\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{\lambda_{i_1}^2}+\cdots+\frac{1}{\lambda_{i_n}^2}}}.$$

Ez alapján a rendszer átlagos működési ideje

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty R(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda_4^2}+\frac{1}{\lambda_5^2}+\frac{1}{\lambda_7^2}}}+\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda_5^2}+\frac{1}{\lambda_7^2}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda_3^2}+\frac{1}{\lambda_4^2}+\frac{1}{\lambda_5^2}+\frac{1}{\lambda_7^2}}}-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda_4^2}+\frac{1}{\lambda_5^2}+\frac{1}{\lambda_6^2}+\frac{1}{\lambda_7^2}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda_4^2}+\frac{1}{\lambda_5^2}+\frac{1}{\lambda_6^2}+\frac{1}{\lambda_7^2}}}-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda_3^2}+\frac{1}{\lambda_5^2}+\frac{1}{\lambda_7^2}}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda_4^2}+\frac{1}{\lambda_6^2}}}-$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_3^2}+\frac{1}{\lambda_4^2}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_3^2}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda_4^2}+\frac{1}{\lambda_6^2}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_4^2}}}\right).$$

13. Feladat

Feltételezve, hogy a 4.6-os ábrán bemutatott rendszerben a műveleti egységek üzemelési ideje exponenciális eloszlást követnek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ paraméterekkel, milyen eloszlást követ a rendszer működési ideje.

Megoldás

Ha műveleti egységeink működési ideje exponenciális eloszlást követnek rendre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ paraméterekkel, akkor az eloszlásfüggvényük,

$$F_i(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i t} \quad i = 1, 2, 3,$$

a túlélési függvényük

$$R_i(t) = 1 - F_i(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_i t} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ha a rendszer $Q(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3$ megbízhatósági polinomjába behelyettesítjük az egyes műveleti egységek működésének a valószínűségét, akkor megkapjuk, hogy a rendszer mekkora valószínűséggel üzemel

$$p_i = \mathbf{P}(\text{az } i \text{ műveleti egység üzemel}),\ i = 1, 2, 3$$

$$P = \mathbf{P}(\text{a rendszer működik}) = Q(p_1, p_2, p_3).$$

Folytonos időbe átültetve ezt az eredményt, ha azt szeretnénk megtudni, hogy a t időpillanatban mekkora eséllyel működőképes a rendszer, azaz szeretnénk meghatározni a túlélési függvényét a működési idejének, csak be kell helyettesítenünk a megbízhatósági polinomba, hogy az adott t időpontban az egyes egységek mekkora valószínűséggel üzemelnek. Ezek az értékek viszont pont az egyes műveleti egységek túlélési függvénye a t időpontban, így a rendszer túlélési függvénye

$$R(t) = \mathbf{P}(\text{a rendszer üzemel a } t \text{ időpontban}) = \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{e}^{-\lambda_3 t} = \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_3)t},$$

így az eloszlásfüggvényünk

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_3)t}.$$

Ez egy $\lambda_2 + \lambda_3$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változónak az eloszlásfüggvénye, tehát ilyenkor a rendszer működési ideje exponenciális eloszlást követ.

14. Feladat

Tegyük fel, hogy a 4.6-os ábrán bemutatott rendszerben a műveleti egységek üzemelési ideje exponenciális eloszlást követnek, átlagos üzemelési idejük rendre 3, 2, 4. Átlagosan mennyi ideig üzemel a rendszer. Lehet-e a rendszeren úgy változtatni valamely műveleti egység többszörözésével (redundáns módon történő beépítésével) hogy a rendszer várható működési ideje elérje a 2 értéket?

Megoldás

Mivel a műveleti egységek átlagos működési ideje sorban 3, 2, 4, így megadhatóak a λ paramétereink

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{4}.$$

Az előző feladatban megmutattuk, hogy exponenciális működési idejű műveleti egységek esetén a rendszer működési ideje exponenciális eloszlást követ $\lambda_2 + \lambda_3$ paraméterrel. Ebből már meg is adható a rendszer várható működési ideje

$$\mathsf{E}(\tau) = \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Ha szeretnénk a várható működési időt 2-re növelni, akkor biztosan a 2-es műveleti egységet kell párhuzamosítanunk a következők miatt. Az 1-es műveleti egységtől eleve nem is függ a rendszer működése, a 3-as egység többszörözésével pedig az a gond, hogy akkor a 2-es műveleti egység várható működési ideje nem növekszik. Mivel már korábban megállapítottuk, hogy a rendszer üzemeléshez a 2-es és 3-as egység együttes üzemelése szükséges, így a két egység várható ü zemelési idejének a minimumánál biztosan kisebb lesz a rendszer várható működési ideje. Tehát már csak az a kérdés, hány párhuzamos egységet szükséges beraknunk a 2-es egység mellé, hogy elérjük, hogy 2 legyen az átlagos működési ideje a rendszernek.

Egy korábbi feladatban kiszámítottuk, hogy ha az i műveleti egységből létrehozunk n darab párhuzamos egységet, akkor a rendszer megbízhatósági függvényében x_i helyére az

$$1 - (1 - x_i)^n$$

kifejezés kerül. Így a 2-es műveleti egység n-szerezésével a következő megbízhatósági polinomot kapjuk

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (1 - (1 - x_2)^n)\, x_3.$$

Mint ahogyan több korábbi feladatban, most is úgy határozzuk meg a rendszer működési idejének a túlélési függvényét, hogy a megbízhatósági függvényébe behelyettesítjük az egyes műveleti egységek üzemelési idejének a túlélési függvényét

$$R_i(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_i t}, \ \ i = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned} R(t) = Q(R_1(t), R_2(t), R_3(t)) &= \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)^n\right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} = \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)^n. \end{aligned}$$

A τ várható értékét a korábban bemutatott módon számíthatjuk az

$$\mathsf{E}(\tau) = \int_0^\infty R(u)\, \mathrm{d}u = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u}{4}} - \mathrm{e}^{-\frac{u}{4}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\right)^n \, \mathrm{d}u$$

képlet segítségével. Az integrál első része

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u}{4}}\,\mathrm{d}u = \left[4\mathrm{e}^{-\frac{u}{4}}\right]_0^\infty = 4.$$

Ezután felbontjuk a zárójelet és kihasználjuk az integrálás linearitását kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\tau) = 4 - &\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u}{4}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\right)^{n-k} \mathrm{d}u = \\
&= 4 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{2(n-k)u}{4}}\,\mathrm{d}u = \\
&= 4 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u(1+2n-2k)}{4}}\,\mathrm{d}u = \\
&= 4 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left[-\frac{4}{1+2n-2k}\mathrm{e}^{-\frac{u(1+2n-2k)}{4}}\right]_0^\infty = \\
&= 4 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{4}{1+2n-2k}.
\end{aligned}$$

Azt még érdemes észrevenni, hogy az összegzendő rész utolsó tagja $(k = n)$ mindig 4 lesz, így

$$\mathbf{E}(\tau) = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{4}{1+2n-2k}$$

Innentől érdemes egy egyszerű matematika programmal kiszámítani, mekkora n esetén éri el a várható érték a 2-t

$$\begin{aligned}
n = 1, \quad & \mathbf{E}(\tau) = -\sum_{k=0}^{0} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} \frac{4}{1+2-2k} = \frac{4}{3} \approx 1,3333 \\
n = 2, \quad & \mathbf{E}(\tau) = -\sum_{k=0}^{1} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} \frac{4}{1+4-2k} = \frac{28}{15} \approx 1,8668 \\
n = 3, \quad & \mathbf{E}(\tau) = -\sum_{k=0}^{2} (-1)^{3-k} \binom{3}{k} \frac{4}{1+6-2k} = \frac{76}{35} \approx 2,1714.
\end{aligned}$$

Tehát ha 3 párhuzamos egység szerepel a 2-es műveleti egység helyén, akkor már 2 fölé megy a rendszer átlagos üzemelési ideje.

5. PÉLDATÁR

Fenntarthatósági mértékek energiatermelő ellátási láncokban

5.1. Az SPI számolása

Jelölések

- A_{tot} - mekkora terület kell ahhoz, hogy egy folyamat fenntartható módon beépülhessen az ökoszférába
- A_R - a nyersanyagok területszükséglete
- A_E - az energiához tartozó terület érték
- A_I - a berendezések terület értéke
- A_S - a munkásokhoz tartozó terület érték
- A_p - a termékekhez illetve melléktermékekhez tartozó érték
- A_D - a disszipáció értéke
- S_{tot} - éves előállított egység
- a_{tot} - fajlagos (fenntartható) szolgáltatási terület
- Y_{tot} - a fajlagos szolgáltatási terület reciproka
- a_{tin} - az adott régióra jellemző egy főre jutó terület
- SPI - fenntartható folyamat index

Képletek

$$A_{tot} = A_R + A_E + A_I + A_S + A_p + A_D \quad [\text{m}^2]$$

$$a_{tot} = A_{tot}/S_{tot} = 1/Y_{tot} \quad [\text{m}^2/\text{ év egység}]$$

$$SPI = a_{tot}/a_{tin}$$

1. Feladat

A rendelkezésre álló adatok alapján hasonlítsuk össze az alábbi két közlekedési módot! Értékeljük az eredményeket!

Egy adott régióban a vonatok egy év alatt 900.000 km-t tesznek meg. Egy korábbi projekt keretében meghatározták a következő adatokat: $A_R = 2.000.00$, $A_E = 1.200.000$, $A_I = 2.200.000$, $A_S = 600.000$, $A_P = 1.100.000$, $A_D = 1.200.000$, $a_{tin} = 2.000$.

Ugyanebben a régióban a személyautók összességében 35 millió km-t tesznek meg. Az ehhez tartozó értékek a következők: $A_R = 72.000.000$, $A_E = 120.000.000$, $A_I = 560.000.00$, $A_S = 65.000.000$, $A_P = 470.000.000$, $A_D = 890.000.000$.

Megoldás

A korábbi projekt adatait behelyettesítve a képletekbe a fenti eredményeket kapjuk. A vonatra vonatkozó a_{tot} érték $9,22$ lényegesen kedvezőbb, mint a személyautó $62,2$ m^2-es értéke, ezért lehetőség szerint az előbbit kell favorizálni.

$$\left.\begin{aligned} A_{tot} &= 8300000 \\ a_{tot} &= 9,222222222 \\ Y_{tot} &= 0,108433735 \\ SPI &= 0,004611111 \end{aligned}\right\}\text{vonat}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{tot} &= 2177000000 \\ a_{tot} &= 62,2 \\ Y_{tot} &= 0,01607717 \\ SPI &= 0,0311 \end{aligned}\right\}\text{személyautó}$$

5.1. táblázat

2. Feladat

A rendelkezésre álló adatok alapján hasonlítsuk össze az alábbi két közlekedési módot! Hogyan viszonyul az elektromos autó a hagyományos benzin üzemű autóhoz? Hogyan viszonyul a busz a vasúti közlekedéshez?

Egy adott régióban a buszok egy év alatt $5.500.000$ km-t tesznek meg. Egy korábbi projekt keretében meghatározták a következő adatokat: $A_R = 22.000.00$, $A_E = 47.600.000$, $A_I = 19.200.000$, $A_S = 3.900.000$, $A_P = 28.000.000$, $A_D = 32.000.000$, $a_{tin} = 2.000$.

Ugyanebben a régióban az elektromos autók összességében 3.3 millió km-t tesznek meg. Az ehhez tartozó értékek a következők: $A_R = 12.200.000$, $A_E = 11.000.000$, $A_I = 42.000.00$, $A_S = 9.500.000$, $A_P = 36.000.000$, $A_D = 72.000.000$.

Megoldás

$$\left.\begin{aligned} A_{tot} &= 152700000 \\ a_{tot} &= 27,76363636 \\ Y_{tot} &= 0,036018337 \\ SPI &= 0,013881818 \end{aligned}\right\}\text{busz}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{tot} &= 182700000 \\ a_{tot} &= 55,36363636 \\ Y_{tot} &= 0,018062397 \\ SPI &= 0,027681818 \end{aligned}\right\}\text{elektromos autó}$$

5.2. táblázat

A korábbi projekt adatait behelyettesítve a képletekbe a fenti eredményeket kapjuk. A buszra vonatkozó a_{tot} érték $27,76$ lényegesen kedvezőbb, mint az elektromos autó $55,36$ m^2-es értéke, ezért lehetőség szerint az előbbit kell favorizálni. Az elektromos autó nem sokkal, de kedvezőbb, mint a benzin üzemű autó, főleg a kisebb levegőszennyezés miatt. Viszont az elektromos autó esetén a szennyezés az áram előállításánál történik, vagyis a szennyezés nem szűnt meg, hanem a helye módosult. Ahogy az elektromos áram előállítása egyre nagyobb mértékben fog megújuló energiahordozókra támaszkodni, úgy fog csökkenni az elektromos autó a_{tot} értéke.

A busz és a vonat összehasonlítása azt mutatja, hogy a vonat kedvezőbb fenntarthatósági szempontból. Ennek oka elsősorban a mérethatékonyság, egy vonat kevésbé szennyez, mint az ugyanannyi utast szállító buszok összesen. A másik ok, hogy a vonat külön pályán mozog, így kevesebb lassításra, gyorsításra van szüksége.

3. Feladat

A rendelkezésre álló adatok alapján hasonlítsuk össze az alábbi két közlekedési módot!

Egy adott régióban a buszok egy év alatt 470.000 km-t tesznek meg. Egy korábbi projekt keretében meghatározták a következő adatokat: $A_R = 3.400.00$, $A_E = 4.760.000$, $A_I = 2.600.000$, $A_S = 500.000$, $A_P = 3.200.000$, $A_D = 3.400.000$, $a_{tin} = 2.000$.

Ugyanebben a régióban az elektromos autók összességében 6 millió km-t tesznek meg. Az ehhez tartozó értékek a következők: $A_R = 25.000.000$, $A_E = 52.000.000$, $A_I = 52.000.00$, $A_S = 15.00.000$, $A_P = 42.000.000$, $A_D = 63.000.000$.

Megoldás

A korábbi projekt adatait behelyettesítve a képletekbe a fenti eredményeket kapjuk. A repülőre vonatkozó a_{tot} érték 38 valamivel kedvezőbb, mint az elektromos autó $41,5$ m^2-es értéke.

$$\left.\begin{aligned} A_{tot} &= & 17860000 \\ a_{tot} &= & 38 \\ Y_{tot} &= & 0,026315789 \\ SPI &= & 0,019 \end{aligned}\right\}\text{repülő}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{tot} &= & 249000000 \\ a_{tot} &= & 41,5 \\ Y_{tot} &= & 0,024096386 \\ SPI &= & 0,02075 \end{aligned}\right\}\text{autó (bioetanol, E85)}$$

5.3. táblázat

5.2. Műveleti egységek költségei

Jelölések

- acc - évesített befektetési költség, [$/év]
- oci - működési költség az i-dik periódusra, [$/év]
- tc - teljes költség, [$/év]
- cc - beruházási költség

4. Feladat

Egy műveleti egység beruházási költsége $150 + 40x$, működési költsége $22 + 4x$, a megtérülési idő 10 év. Adjuk meg a teljes költség képletét!

Megoldás

$$tc = 150/10 + 22 + (40/10 + 4)x$$

$$tc = 15 + 22 + (4 + 4)x$$

$$tc = 37 + 8x$$

5. Feladat

Egy műveleti egység beruházási költsége $42 + 6x$, működési költsége $12 + x$, a megtérülési idő 2 év. Adjuk meg a teljes költség képletét!

Megoldás

$$tc = 42/2 + 12 + (6/2 + 1)x$$

$$tc = 21 + 12 + (3 + 1)x$$

$$tc = 33 + 4x$$

6. Feladat

Egy műveleti egység beruházási költsége $88 + 12x$, működési költsége $52 + 6,2x$, a megtérülési idő 4 év. Adjuk meg a teljes költség képletét!

Megoldás

$$tc = 88/4 + 52 + (12/4 + 6,2)x$$

$$tc = 22 + 52 + (3 + 6,2)x$$

$$tc = 74 + 9,2x$$

7. Feladat

Egy műveleti egység teljes költsége $62 + 12x$, működési költsége $32 + 5x$, a megtérülési idő 10 év. Adjuk meg a beruházási költség képletét!

Megoldás

$$tc = 62 + 12x$$

$$acc = 62 - 32 + (12 - 5)x$$

$$acc = 30 + 7x$$

$$cc = 30 * 10 + 7 * 10x$$

$$cc = 300 + 70x$$

8. Feladat

Egy műveleti egység teljes költsége $25 + 21x$, működési költsége $6 + 2x$, a megtérülési idő 10 év. Adjuk meg a beruházási költség képletét!

Megoldás

$$tc = 25 + 21x$$

$$acc = 25 - 6 + (21 - 2)x$$

$$acc = 19 + 19x$$

$$cc = 19 * 10 + 19 * 10x$$

$$cc = 190 + 190x$$

9. Feladat

Egy műveleti egység teljes költsége $18 + 6x$, beruházási költsége $45 + 10x$, a megtérülési idő 5 év. Adjuk meg a működési költség képletét!

Megoldás

$$tc = 18 + 6x$$

$$acc = cc/10 = 45/5 + (10/5)x$$

$$acc = 9 + 2x$$

$$oc = tc - acc = 18 - 9 + (6 - 2)x$$

$$oc = 9 + 4x$$

10. Feladat

Egy műveleti egység teljes költsége $26 + 11x$, beruházási költsége $60 + 20x$, a megtérülési idő 10 év. Adjuk meg a működési költség képletét!

Megoldás

$$tc = 26 + 11x$$

$$acc = cc/10 = 60/10 + (20/10)x$$

$$acc = 6 + 2x$$

$$oc = tc - acc = 26 - 6 + (11 - 2)x$$

$$oc = 20 + 9x$$

5.3. Multi-periódusos műveleti egységek költségei

Jelölések

- pl_i - periódus hossz, [év]
- mf_j - havi bemenet, [t/hó]
- pf_i - periódus bemenete, [t/periódus]
- a_i - aktuális kapacitás az i-edik periódusra, [t/év]
- m - maximális kapacitás
- cc_f - beruházási költség fix része
- cc_p - beruházási költség arányos része
- pp - megtérülési időszak
- acc_f - évesített beruházási költség fix része
- acc_p - évesített beruházási költség arányos része
- oc_f - működési költség fix része
- oc_p - működési költség arányos része

Képletek

$$cc = cc_f + cc_p * m$$

$$acc = cc_f/pp + (cc_p/pp)m$$

$$oc_i = (oc_f + oc_p * a_i)pl_i$$

$$m = max_i\{a_i\}$$

$$tc = acc + \Sigma oc_i$$

$$a_i = pf_i/pl_i$$

11. Feladat

Egy multi-periódusos műveleti egység beruházási költsége $cc = 140+20m$, működési költsége $oc = 6+3ai$, a megtérülési idő 10 esztendő, bemeneti arányszáma 1. Az egyes periódusok hossza $5, 5$ és 2 hónap, a feldolgozandó mennyiségek $1, 2$ és $7, 5$ t/hó. Határozzuk meg az egyes periódusok teljes bemenetét, a periódusra vonatkozó aktuális kapacitást, a maximális kapacitást, az egyes periódusok működési költségeit, az évesített befektetési költséget és a teljes költséget!

Megoldás

	Periódus 1	Periódus 2	Periódus 3
Periódus hossz, pl_i [év]	$0,416666667$	$0,416666667$	$0,166666667$
Havi bemenet, mf_i [t/hó]	1	2	$7,5$
Periódus bemenete, pf_i [t/periódus]	5	10	15
Aktuális kapacitás, a_i [t/év]	12	24	90
Maximális kapacitás, m [t/év]	90	90	90
Működési költség, oc [$/év]	$17,5$	$32,5$	46
Évesített befektetési költség, acc [$/év]	194	194	194
Teljes költség, tc [$/év]	290	290	290

5.4. táblázat

12. Feladat

Egy multi-periódusos műveleti egység beruházási költsége $cc = 75 + 35m$, működési költsége $oc = 12+4ai$, a megtérülési idő 5 esztendő, bemeneti arányszáma 1. Az egyes periódusok hossza 4, 3, 2, és 3 hónap, a feldolgozandó mennyiségek 2, 3, 1 és 4 t/hó. Határozzuk meg az egyes periódusok teljes bemenetét, a periódusra vonatkozó aktuális kapacitást, a maximális kapacitást, az egyes periódusok működési költségeit, az évesített befektetési költséget és a teljes költséget!

Megoldás

	Periódus 1	Periódus 2	Periódus 3	Periódus 4
Periódus hossz, pl_i [év]	$0,03333333$	$0,25$	$0,166666667$	$0,25$
Havi bemenet, mf_i [t/hó]	2	3	1	4
Periódus bemenete, pf_i [t/periódus]	8	9	2	12
Aktuális kapacitás, a_i [t/év]	24	36	12	48
Maximális kapacitás, m [t/év]	48	48	48	48
Működési költség, oc [$/év]	36	39	10	51
Évesített befektetési költség, acc [$/év]	351	351	351	351
Teljes költség, tc [$/év]	487	487	487	487

5.5. táblázat

13. Feladat

Egy multi-periódusos műveleti egység beruházási költsége $cc = 44 + 12m$, működési költsége $oc = 3+2ai$, a megtérülési idő 4 esztendő, bemeneti arányszáma 1. Az egyes periódusok hossza 1, 2, 3, és 6 hónap, a feldolgozandó mennyiségek 6, 3, 2 és 1 t/hó. Határozzuk meg az egyes periódusok teljes bemenetét, a periódusra vonatkozó aktuális kapacitást, a maximális kapacitást, az egyes periódusok működési költségeit, az évesített befektetési költséget és a teljes költséget! Ha a termék tárolható, akkor ugyanaz az éves mennyiség, mekkora költséggel dolgozható fel?

Megoldás

	Periódus 1	Periódus 2	Periódus 3	Periódus 4
Periódus hossz, pl_i [év]	$0,083333333$	$0,16666667$	$0,25$	$0,5$
Havi bemenet, mf_i [t/hó]	6	3	2	1
Periódus bemenete, pf_i [t/periódus]	6	6	6	6
Aktuális kapacitás, a_i [t/év]	72	36	24	12
Maximális kapacitás, m [t/év]	72	72	72	72
Működési költség, oc [$/év]	12.25	12.5	$12,75$	$13,5$
Évesített befektetési költség, acc [$/év]	227	227	227	227
Teljes költség, tc [$/év]	278	278	278	278

5.6. táblázat

Ha a termék tárolható, akkor az éves mennyiség, $pf = 6 + 6 + 6 + 6 = 36sa = m = 36$. A teljes költség, $tc = 44/4 + 3 + (12/4 + 2)36 = 14 + 5 * 36 = 194$.

14. Feladat

Egy multi-periódusos műveleti egység beruházási költsége $cc = 21 + 42m$, működési költsége $oc = 120 + 35ai$, a megtérülési idő 3 esztendő, bemeneti arányszáma 1. A négy periódusok hossza megegyezik, a feldolgozandó mennyiségek 2, 3, 12 és 4 t/hó. Határozzuk meg az egyes periódusok teljes bemenetét, a periódusra vonatkozó aktuális kapacitást, a maximális kapacitást, az egyes periódusok működési költségeit, az évesített befektetési költséget és a teljes költséget! Ha a termék tárolható, akkor ugyanaz az éves mennyiség, mekkora költséggel dolgozható fel?

Megoldás

	Periódus 1	Periódus 2	Periódus 3	Periódus 4
Periódus hossz, pl_i [év]	$0,25$	$0,25$	$0,25$	$0,25$
Havi bemenet, mf_i [t/hó]	2	3	12	4
Periódus bemenete, pf_i [t/periódus]	6	9	36	12
Aktuális kapacitás, a_i [t/év]	24	36	144	48
Maximális kapacitás, m [t/év]	144	144	144	144
Működési költség, oc [$/év]	240	345	1290	450
Évesített befektetési költség, acc [$/év]	2023	2023	2023	2023
Teljes költség, tc [$/év]	4348	4348	4348	4348

5.7. táblázat

Ha a termék tárolható, akkor az éves mennyiség, $pf = 6 + 9 + 36 + 12 = 63$ és $a = m = 63$. A teljes költség, $tc = 21/3 + 120 + (42/3 + 35)63 = 127 + 49 * 63 = 3214$.

5.4. Multi-periódusos műveleti egységek modellezése

15. Feladat

Egy multi-periódusos műveleti egység beruházási költsége $cc = 140 + 20m$, működési költsége $oc = 6 + 3ai$, a megtérülési idő 10 esztendő, bemeneti arányszáma 1. Az egyes periódusok hossza 5, 5 és 2 hónap, a feldolgozandó mennyiségek 1, 2 és $7,5$ t/hó. Modellezze a műveleti egységet PNS-Studio-ban! Magyarázza a megoldást!

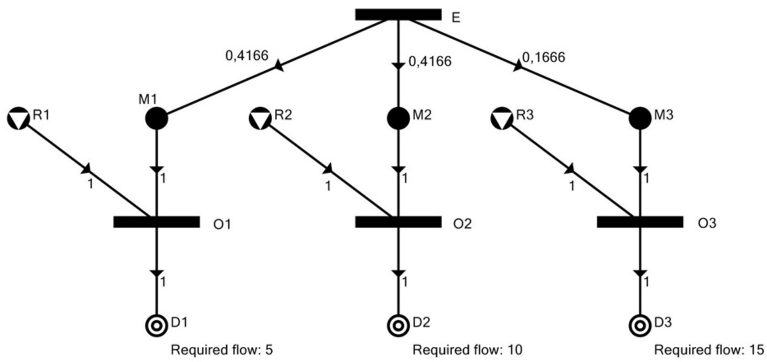
Megoldás

Első lépésként meghatározzuk az egyes periódusok teljes bemenetét, a periódusra vonatkozó aktuális kapacitást, a maximális kapacitást. Az utolsó két adat csak az ellenőrzés miatt érdekes.

	Periódus 1	**Periódus 2**	**Periódus 3**
Periódus bemenete, pf_i [t/periódus]	5	10	15
Aktuális kapacitás, a_i [t/év]	12	24	90
Maximális kapacitás, m [t/év]	90	90	90
Működési költség, oc [$/év]	17.5	32.5	46
Évesített befektetési költség, acc [$/év]	194	194	194
Teljes költség, tc [$/év]	290	290	290

5.8. táblázat

Ezen eredmények alapján felírjuk a P-gráf modellt az alábbi módon. A modellben megjelennek a periódus hosszak az E élein és a teljes periódusra vonatkozó bemenetek a termékeknél. A beruházási költséget az E, a működési költséget az O_1-O_3 műveleti egységeknél vesszük figyelembe. Ezeknél a műveleti egységeknél a működési költség fix részét, 6, eloszthatjuk egyenletesen O_1-O_3-ba, mindegyiknél 2-t figyelembe véve vagy lehetőség van ezen fix rész időarányos elosztására is: $2,5$, $2,5$ és 1. A teljes költség mindkét esetben ugyanaz lesz.



5.1. ábra. A műveleti egység modellje

A modell megoldása után azt kapjuk, hogy az O_1, O_2 és O_3-hoz tarozó relatív méretek rendre 5, 10 és 15 értéket vesznek fel, míg az E relatív mérete 90. E mérete megegyezik a maximális kapacitással, az O_1,O_2 és O_3-hoz tartozó relatív méretek pedig az aktuális kapacitásokhoz kapcsolódnak. Ha az O_2 relatív méretét, 10, elosztjuk az időszak hosszával, $5/12$, akkor megkapjuk az aktuális kapacitást, 24. A berendezés, E, termeli a kapacitást, relatív mérete miatt 90-et. Ezt a 90 egységet szétosztja az egyes periódusokba a periódus hosszak alapján. M_1, M_2 és M_3-ből, amelyek az adott periódusra vonatkozó kapacitást jelölik, rendre $37,5$, $37,5$ és 15 áll elő. Ezekből a kapacitásokból 5-t, 10-et és 15-öt fogyasztunk el, vagyis csak az utolsó periódusban használjuk fel a teljes kapacitást. A költséget a modell határozza meg, 290.

16. Feladat

Egy multi-periódusos műveleti egység beruházási költsége $cc = 75 + 35m$, működési költsége $oc = 12 + 4ai$, a megtérülési idő 5 esztendő, bemeneti arányszáma 1. Az egyes periódusok hossza 4, 3, 2, és 3 hónap, a feldolgozandó mennyiségek 2, 3, 1 és 4 t/hó. Modellezze a műveleti egységet PNS-Studio-ban! Magyarázza a megoldást!

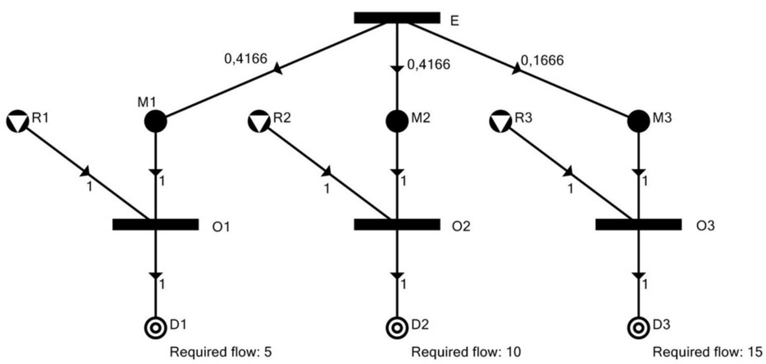
Megoldás

Első lépésként meghatározzuk az egyes periódusok teljes bemenetét.

	Periódus 1	Periódus 2	Periódus 3	Periódus 4
Periódus hossz, pl_i [év]	$0,333333333$	$0,25$	$0,166666667$	$0,25$
Havi bemenet, mf_i [t/hó]	2	3	1	4
Periódus bemenete, pf_i [t/periódus]	8	9	2	12

5.9. táblázat

Ezen eredmények alapján felírjuk a P-gráf modellt az alábbi módon. A modellben megjelennek a periódus hosszak az E élein és a teljes periódusra vonatkozó bemenetek a termékeknél. A beruházási költséget az E, a működési költséget az O_1-O_3 műveleti egységeknél vesszük figyelembe. Az O műveleti egységeknél a működési költség fix részét, 12, egyenletesen elosztjuk el.



5.2. ábra. A műveleti egység modellje

A modell megoldása után azt kapjuk, hogy az O_1, O_2, O_3 és O_4-hoz tarozó relatív méretek rendre 8, 9, 2 és 12 értéket vesznek fel, míg az E relatív mérete 48. E mérete megegyezik a maximális kapacitással. A berendezés, E, termeli a kapacitást, relatív mérete miatt 48-at. Ezt a 48 egységet szétosztja az egyes periódusokba a periódus hosszak alapján. M_1, M_2 és M_3-ből, amelyek az adott periódusra vonatkozó kapacitást jelölik, rendre 16, 12, 8 és 12 áll elő. Ezekből a kapacitásokból 8-at, 9-et, 2-őt és 12-őt fogyasztunk el, vagyis csak az utolsó periódusban használjuk fel a teljes kapacitást. A költséget a modell határozza meg, 487.