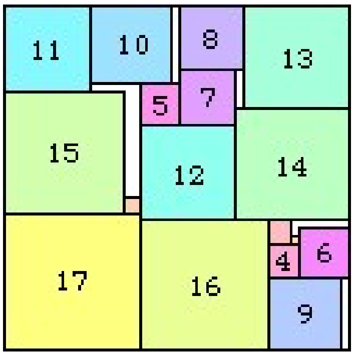
Tekintsük a következő feladatot:

Adott az 1x1 négyzet, a 2x2 négyzet, így tovább, utoljára az n x n nagyságú négyzet.

Melyik a legkisebb KxK -as négyzet, amelybe az előbbiek beférnek (a nagy négyzet oldalaival párhuzamosan, és átfedés nélkül)?

Megoldás:

A feladat kicsi n számokra könnyen megoldható, itt láthatunk például egy megoldást **n=17** esetén.



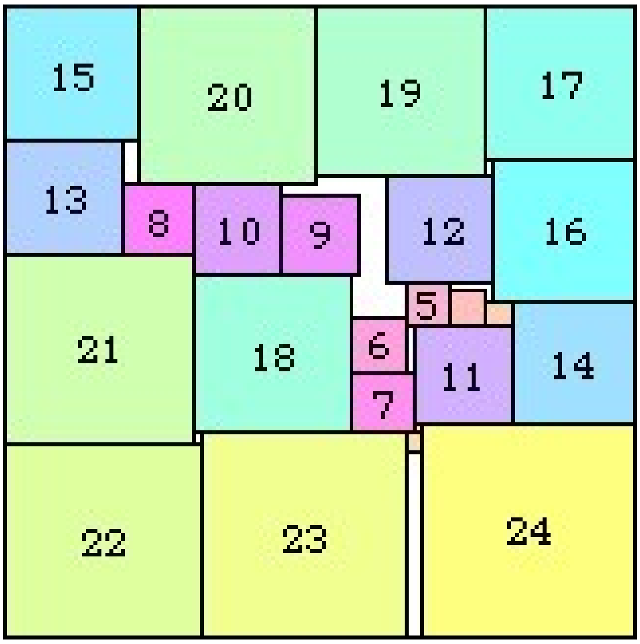
N=17 esetén a helyzet könnyű, mivel a kicsi négyzetek összterülete 785, ennek gyöke nagyjából 42.24, ezt fölfelé kerekítve kapjuk 43-at, könnyen látható, hogy ekkora befoglaló négyzet biztosan kell. Mivel sikerült pont ekkorába bepakolni (valahogyan, akár szerencsével) a kicsi négyzeteket, „ügyesek voltunk”, megnyugodhatunk, ez egy optimális pakolás. Ekkor 43*43-1785=64 cella üresen is maradt. (Az ábra forrása, Internet, Erich Friedman oldala.)

Bizonyos n számokra a kérdés azonban nagyon nehéz.

Már Watson (Watson, 1918) rájött arra, hogy **n=24** az egyetlen n (a triviális n=1 kivételével), amikor 1-től n-ig a négyzetszámok összege maga is négyzetszám. Ha 1-től n=24-ig a négyzetszámokat összeadjuk, az pontosan 70*70. Adódik tehát a kérdés (Gardner, 1966, 1975) hogy vajon beférnek-e ezek a kicsi négyzetek egy 70*70-es nagy négyzetbe, forgatás és átfedés nélkül.

A válasz: nem. Korf (Korf, 2003, 2004) erre adott egy számítógéppel segített bizonyítást, de tisztán kombinatorikai (számítógép segítségét nem igénybe vevő) bizonyítás korábban nem született.

A kutatócsoport tagjainak (más kutatókkal közösen: Sgall 2024) sikerült az első, tisztán kombinatorikai bizonyítással előrukkolni. Álljon itt még egy ábra egy 71*71-es négyzetbe történő pakolásról (amit nem bonyolult megkapni).



Arról értelemszerűen nem tudunk ábrát mutatni, amikor nem férnek be a négyzetek egy 70*70-es nagy négyzetbe. De ezt bárki otthon kipróbálhatja, amit garantálunk, hogy nem fog sikerülni. Ez azonban ne vegye el a kedvünket: amit nem lehet, azt nem lehet. Végre viszont kaptunk egy választ a cikkben arról, hogy miért nem lehet.

Irodalom:

Watson, G.: Messenger of Mathematics, New Series 48, 1--22 (1918).

Gardner, M.: Mathematical games: The problem of Mrs. Perkins' quilt, and answers to last month's puzzles. Scientific American 215(3), 264--272 (1966)

Gardner, M.: Mrs. Perkins' quilt and other square-packing problems. In Mathematical Carnival. New York: Alfred A. Knopf. 139--149, 1975.

Korf, R.E.: Optimal rectangle packing: Initial results. In Proceedings of the 13th International Conference on Automated Planning and Scheduling (ICAPS 2003), pp. 287--295 (2003)

Korf, R.E.: Optimal rectangle packing: New results. In Proceedings of the 14th International Conference on Automated Planning and Scheduling (ICAPS 2004), pp. 142--149 (2004)

Jiří Sgall, János Balogh, József Békési, György Dósa, Lars Magnus Hvattum, and Zsolt Tuza. No Tiling of the 70 × 70 Square with Consecutive Squares. In 12th International Conference on Fun with Algorithms (FUN 2024). Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), Volume 291, pp. 28:1-28:16, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik (2024) https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FUN.2024.28